Suite de Fibonacci et nombre d’or (2)

Le nombre d’or (« est partout » (?)) dans la Nature, le corps humain, l’architecture, l’art, ...

Article assez complet sur le nombre d’or et son histoire
https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d’or

Julien Ramonet, mars 2025

Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées
Images : Wikipedia sauf mention contraire

Notions utilisées :
48. Suite de Fibonacci et nombre d’or (1)

Suite et spirale de Fibonacci

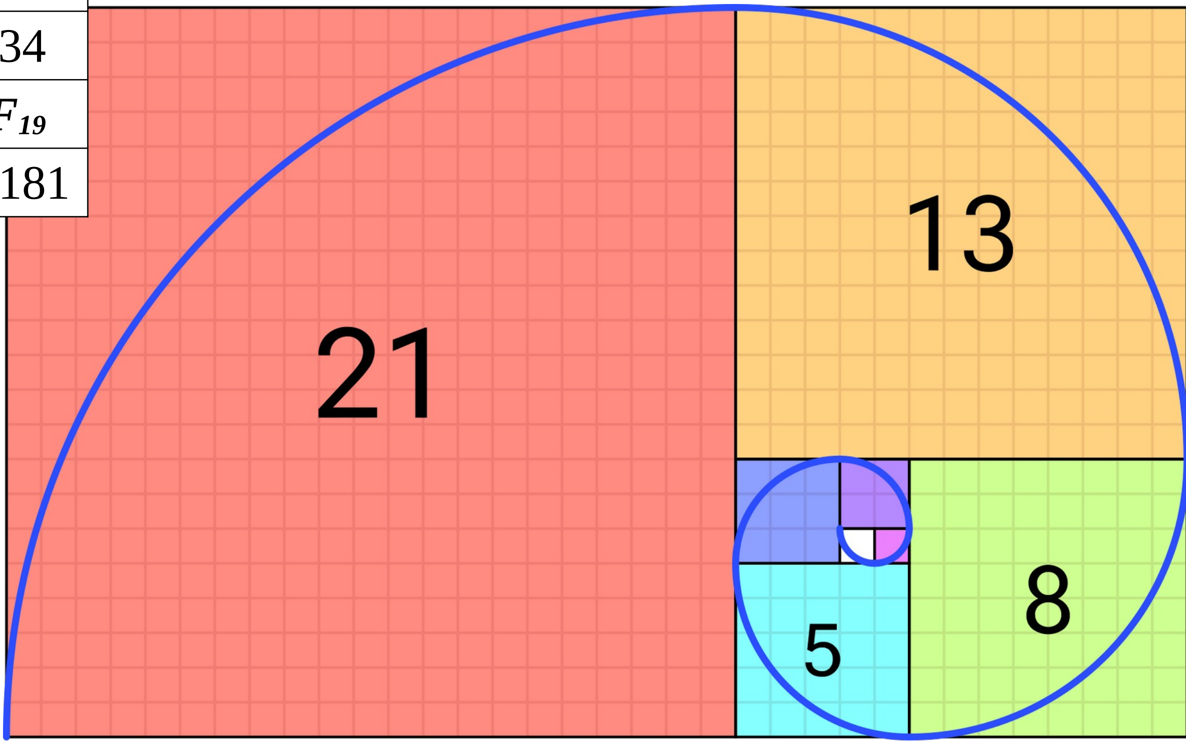
Pour n >0, $\boldsymbol{F_{n+2}=F_{n+1}+F_n}$ avec $F_0=0$ et $F_1=1$

Un terme est la somme des 2 précédents

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$$

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$$



Spirale de Fibonacci =
arcs de cercles reliant les coins
des carrés ajoutés à chaque étape

La spirale d’or

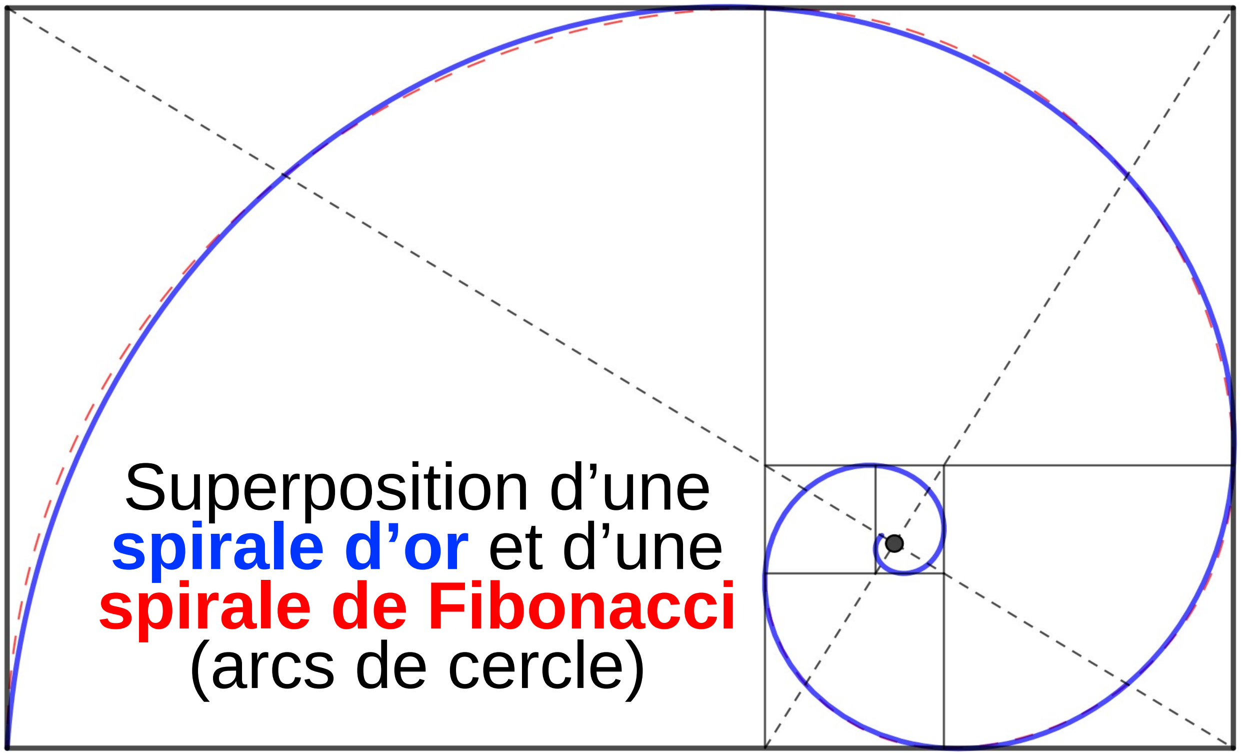
- C’est une **spirale logarithmique** de facteur de croissance φ : **à chaque quart de tour (π/2), son rayon est multiplié par φ**

$$r(\theta) = \varphi^{\frac{\theta}{\pi/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r(\theta+\pi/2)}{r(\theta)} = \varphi$$

→ pour un tour, $\varphi.\varphi.\varphi.\varphi = \varphi^4$

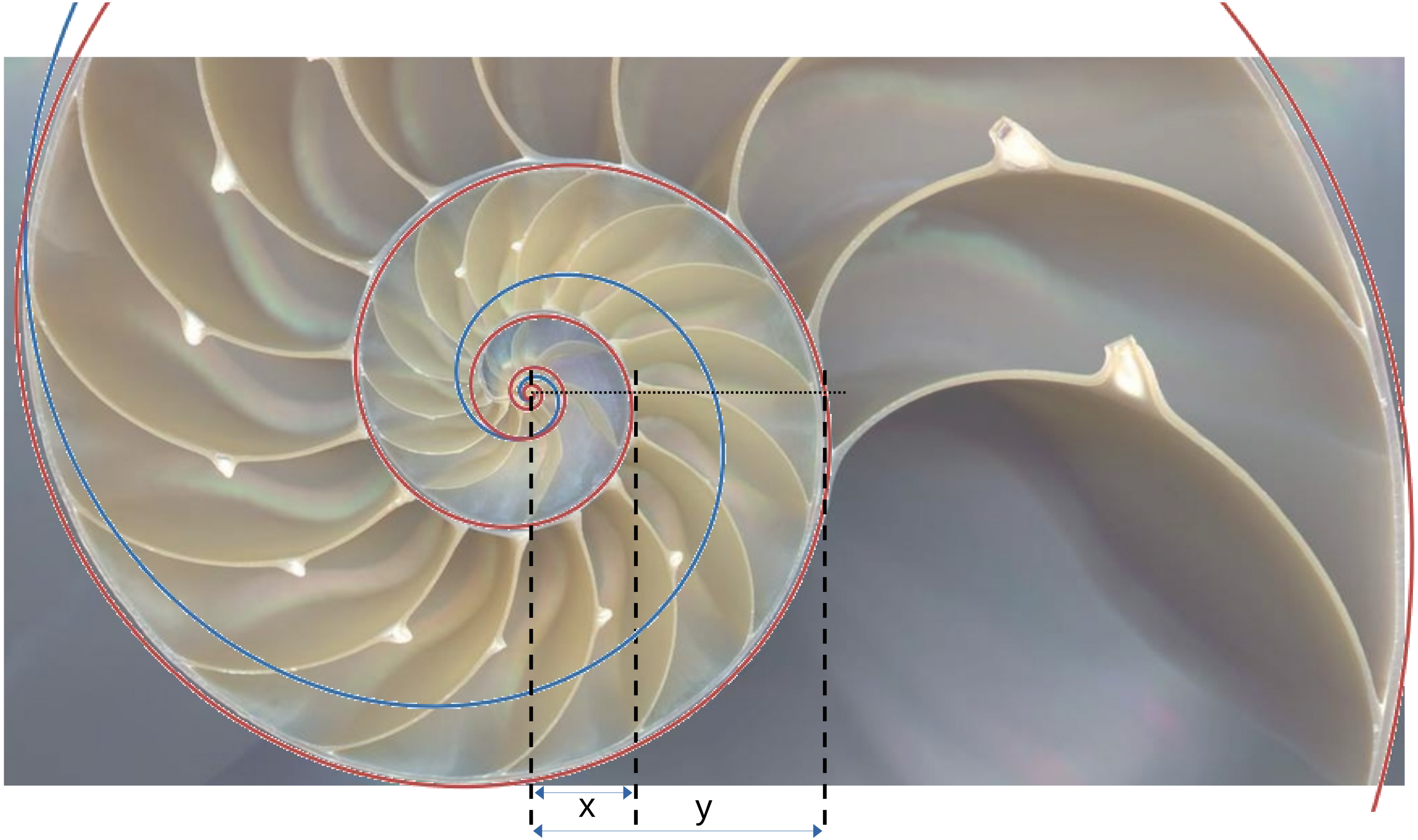
$$\frac{r(\theta+2\pi)}{r(\theta)} = \varphi^4$$



φ DANS LA NATURE

Image très répandue
mais source non trouvée

Le nautile



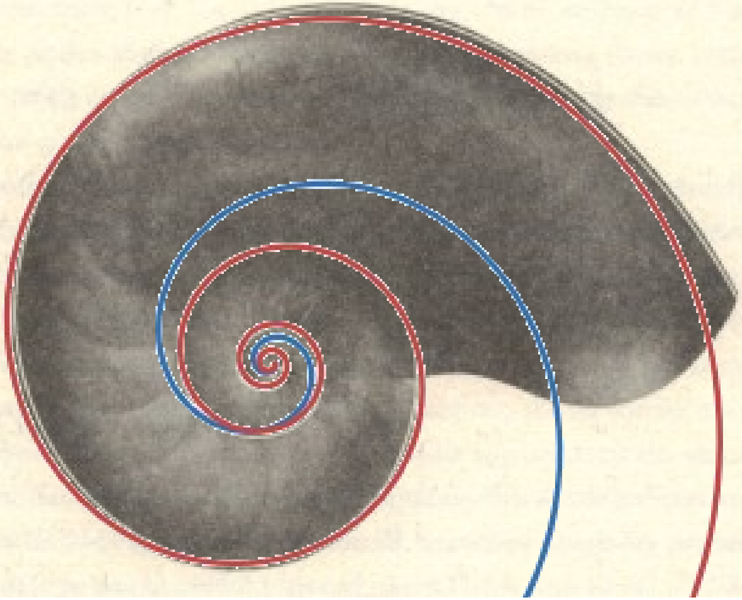
$$r(\theta)=1{,}31^{\frac{\theta}{\pi/2}}$$

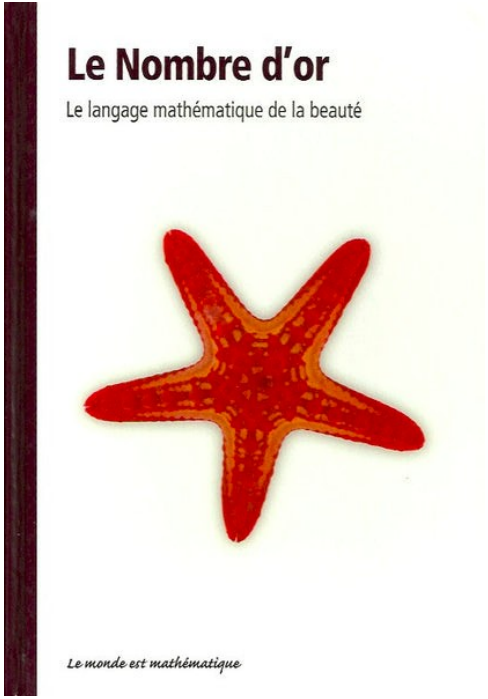
- **Le nautile n’a pas une forme de spirale d’or :**
  - à chaque tour, son rayon n’est **pas** multiplié par φ^4 =6,85
  - mais par $y/x \approx 3 \approx 1{,}31^4$ (spirale logarithmique)
  - **Au bout de 3 tours, spirale bleue 12 fois plus « grande » que la rouge**

Pourtant…

Le nautilus

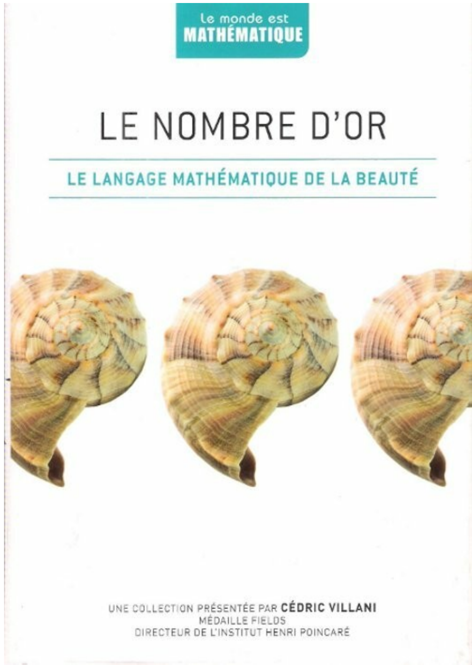
La spirale équiangulaire ou d'or donne forme aux escargots, et son exemple le plus extraordinaire est peut-être celui du nautilus (*Nautilus pompilius*). La structure interne de sa coquille se construit par ajouts successifs de compartiments chaque fois plus grands mais qui conservent tous la même forme. Sur chaque partie préexistante de la coquille s'ajoute un nouveau compartiment, identique, mais plus grand.





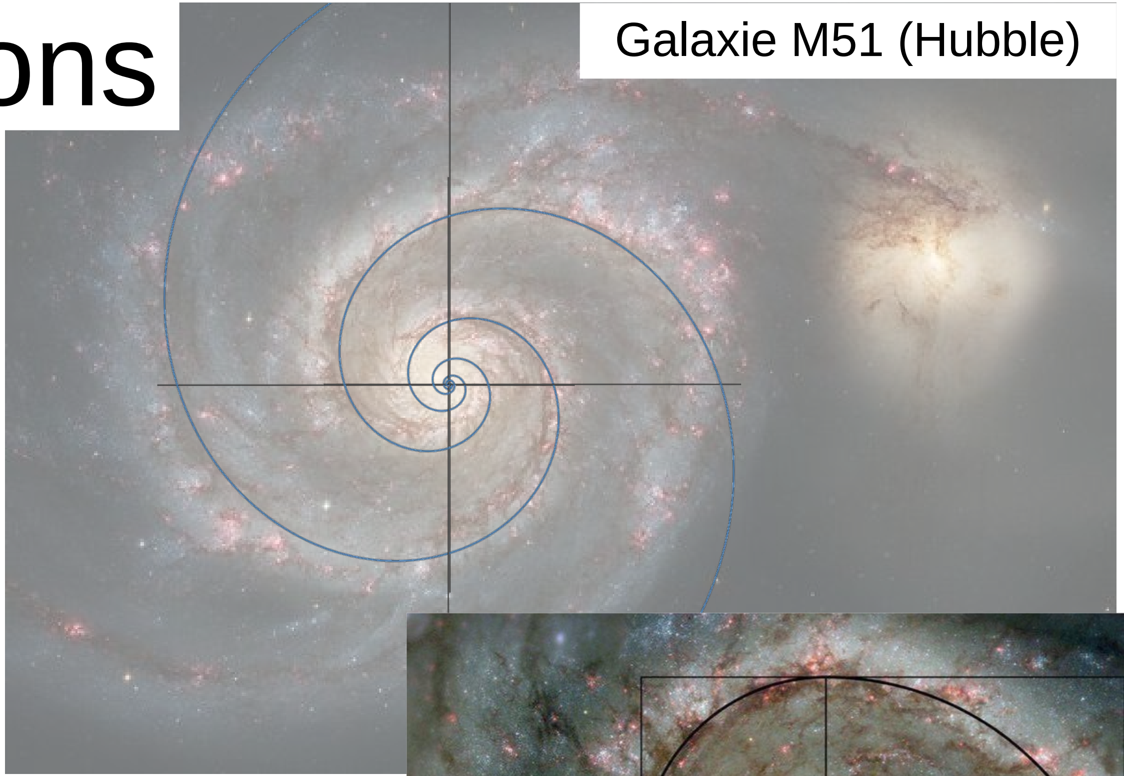
p. 135

Toute spirale n'est pas d'or. Celle du nautile n'a rien à voir avec la divine proportion[k].

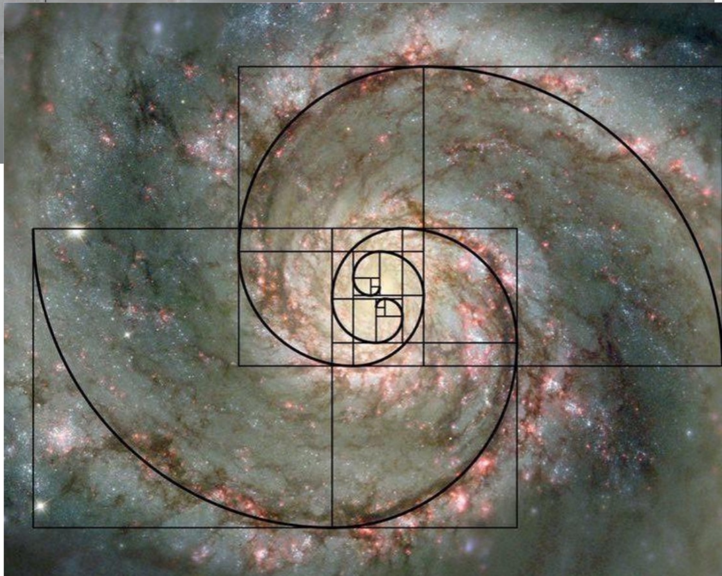


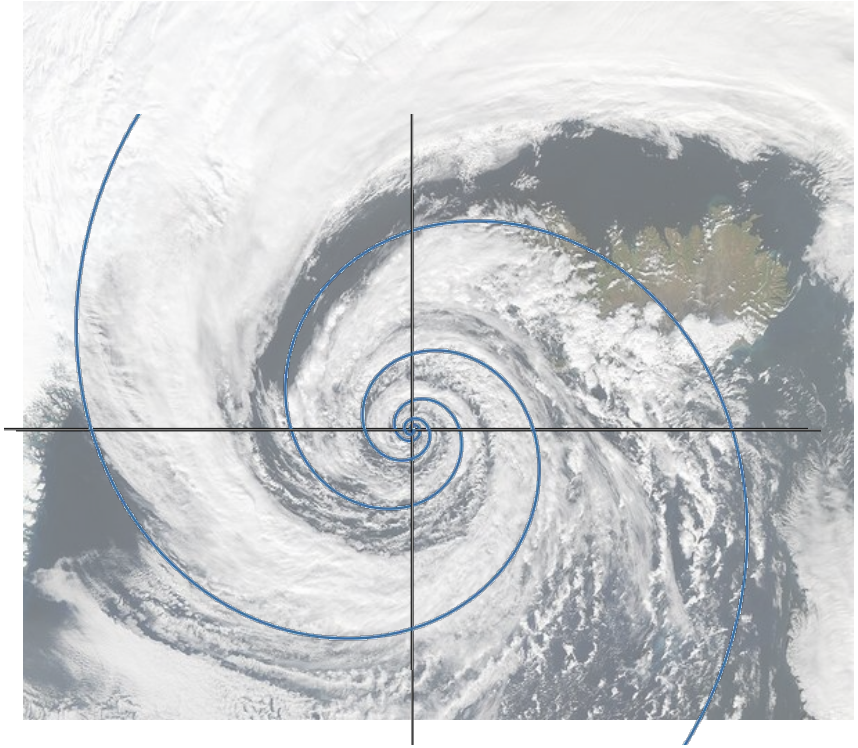
https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d'or

Autres comparaisons



Galaxie M51 (Hubble)





Dépression atmosphérique

Note : superposition de 2 spirales ponctuellement symétrique (rotation de π = 180°)

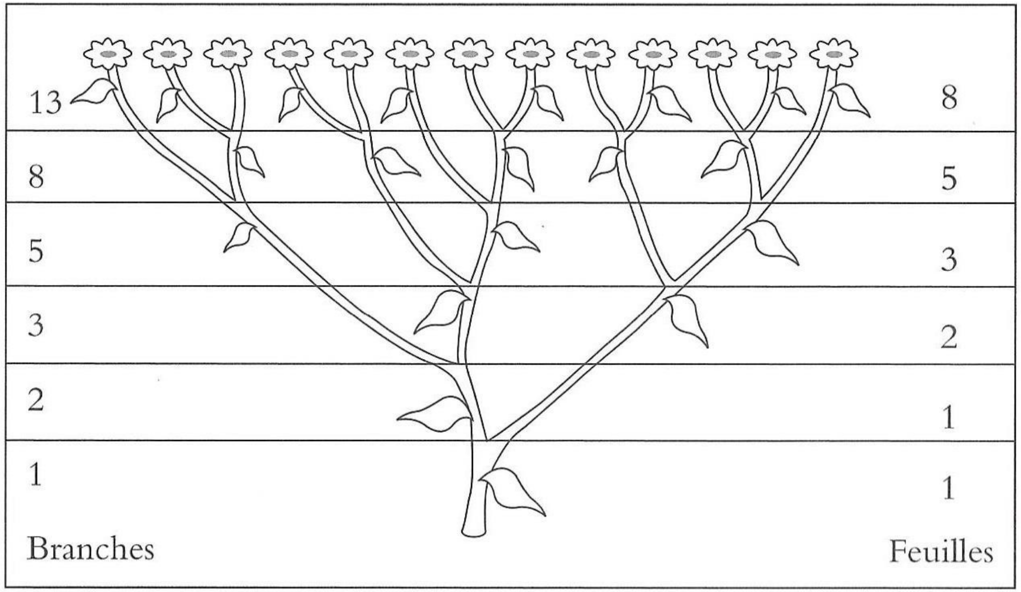
Nombre de feuilles

Il suivrait la suite de Fibonacci

Source non trouvée

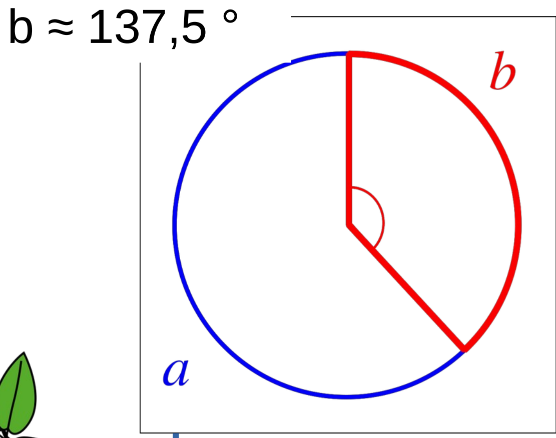
Croissance des végétaux

- La croissance de certains végétaux suit une suite de Fibonacci
  Ex : achillée des marais, arbres, ...

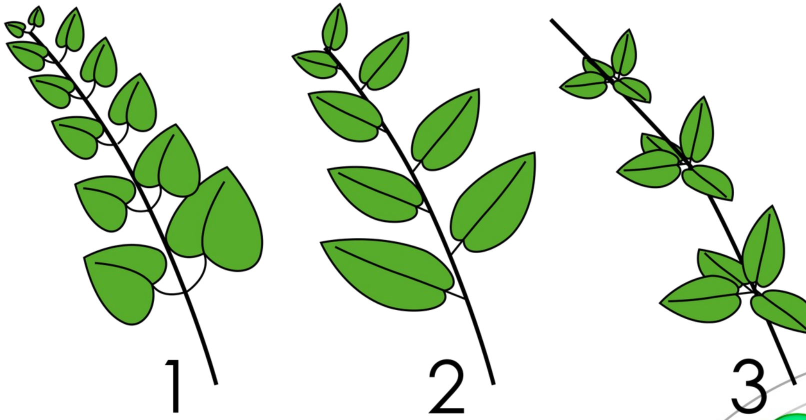


Le nombre d’or, le langage mathématique de la beauté, Fernando Corbalan, 2010, p. 133
https://www.patrimoine-vert-geneve.ch/flore-sauvage/plantes-vasculaires/liste/asteraceae/achillea/achillee-des-marais

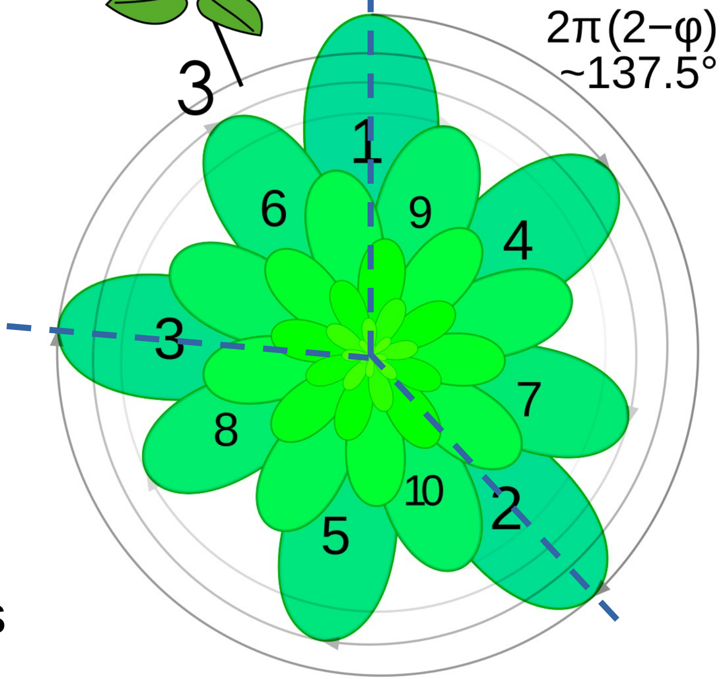
Phyllotaxie



- Science qui étudie la **disposition des feuilles sur les tiges d'une plante**
  1. **Opposée**
  2. **Alterne** (<50%), distique (sur un plan) ou **spiralée**
  3. **Verticillée**



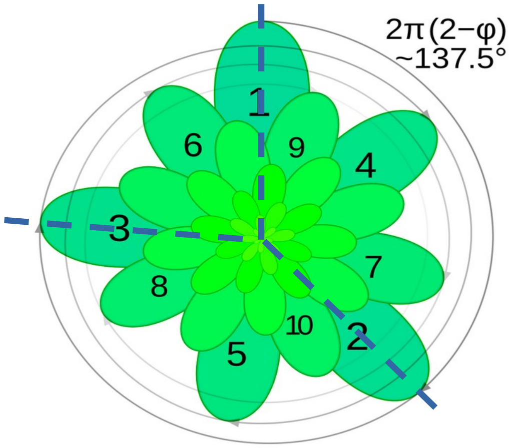
- **Disposition alterne spiralée**
  - minimiserait l'ombrage d'une feuille / une autre
  - Angle entre 2 feuilles ≈ angle d'or dans 80 % des cas (Wikipedia)
  - Spirales = « **parastiches** », dextres ou senestres
  - 1831 : A. Braun : nombre de parastiches = **termes successifs de la suite de Fibonacci**
- Discussion : https://fr.wikipedia.org/wiki/Phyllotaxie#considerations

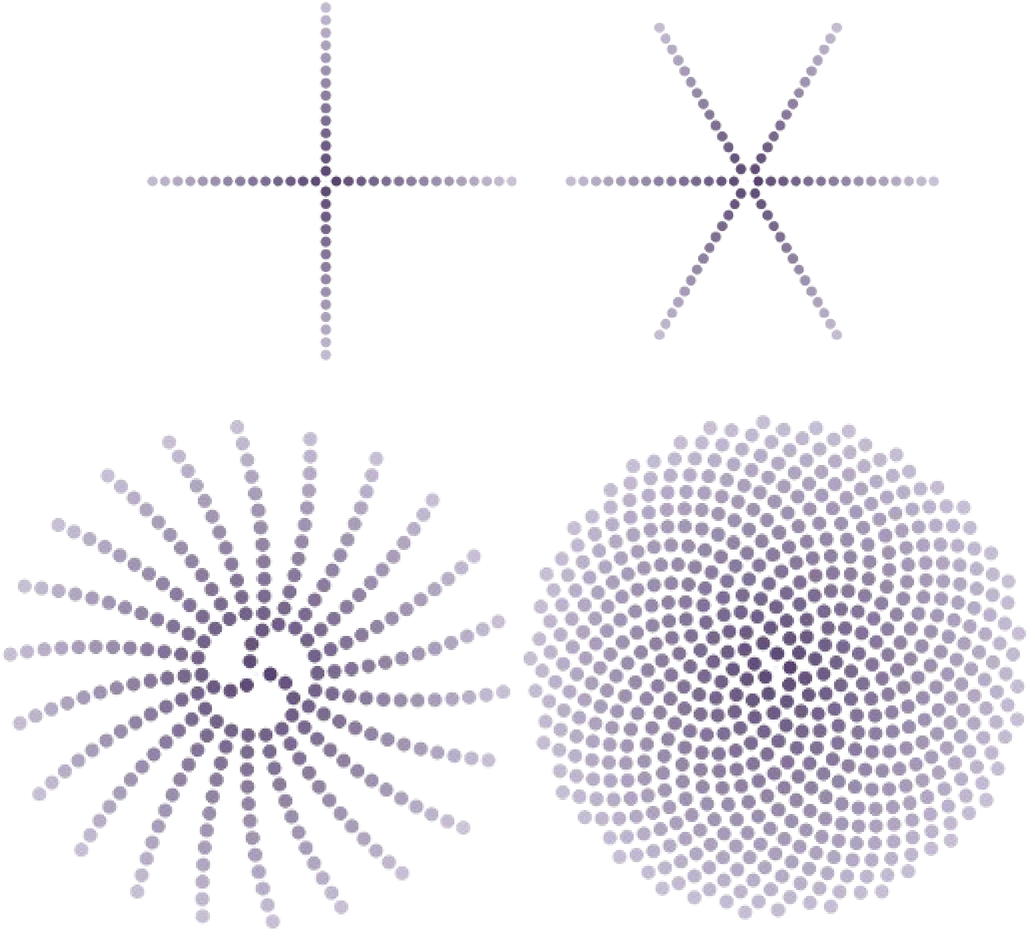


Disposition de feuilles suivant l'angle d'or

Simulation mathématique

- Sommet de la plante = « apex »
- Protubérances / excroissances = « ***primordia*** » → feuilles, écailles (pomme de pin), fleurons (tournesol)
- Angle entre 2 *primordiae* = « **angle de divergence** »





Angles de div : 1/4, 1/6, 1/π, 1/φ=φ-1 (x 2 π)

https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/SpiralesFibo/explications_spirales.html http://www-irem.univ-fcomte.fr/download/irem/document/promotiondesmaths/fichiers-pour-intervention-chercheurs-dans-les-classes/anne-marie-aebischer---francoise-de-la-bachelerie/texte-du-diaporama.pdf

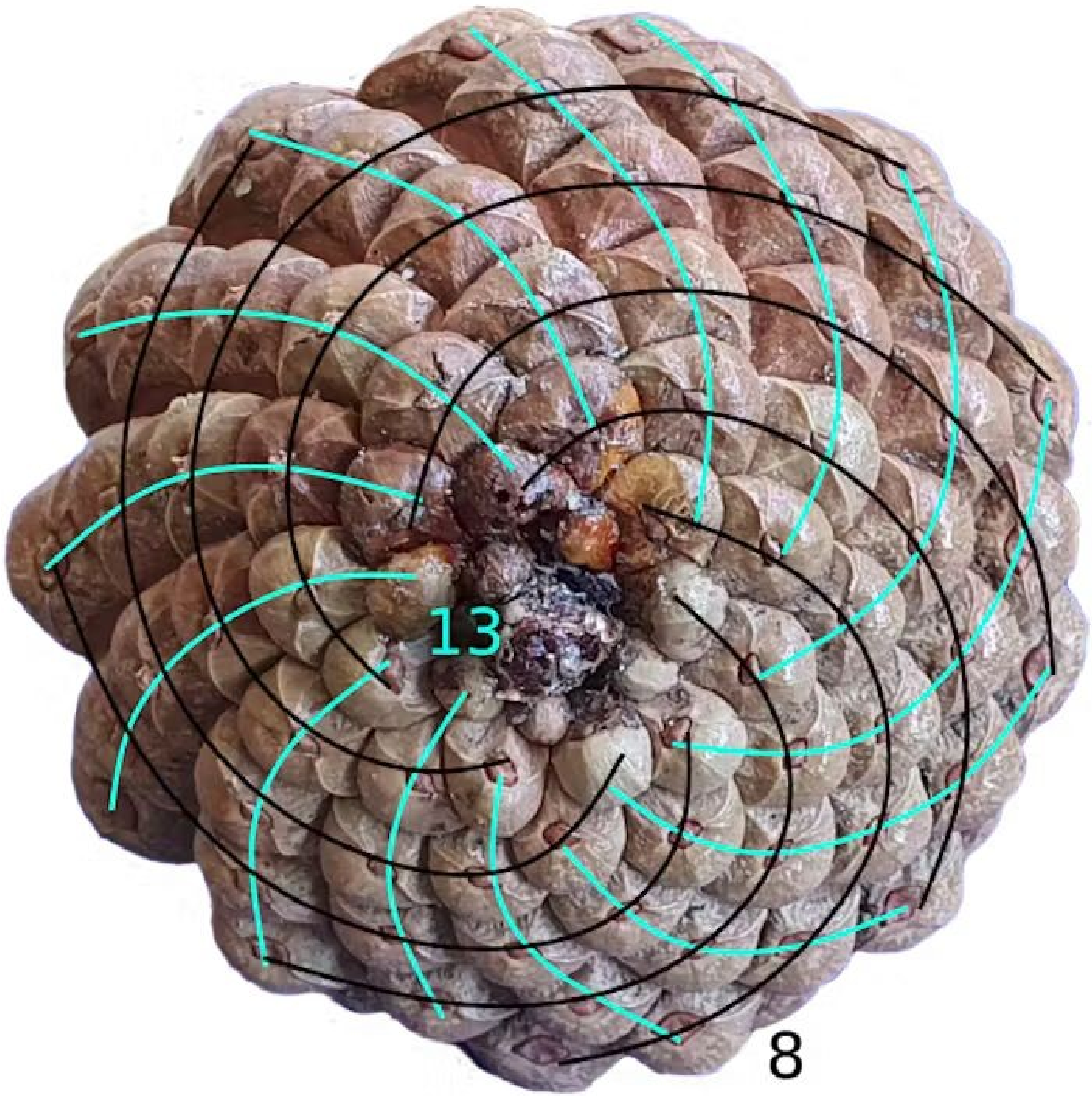
Chou romanesco

- 13 spirales senestres
- Spirales dextres ?
- Mais pas spirales d’or

https://hidroponia.mx/romanesco-por-hidroponia-aprende-a-cultivarlo/

Pomme de pin

- 8 spirales dextres
- 13 spirales senestres



https://www.univ-rouen.fr/actualites/la-vraie-nature-du-nombre-dor/

Marguerite

- 13 spirales dextres
- 21 spirales senestres

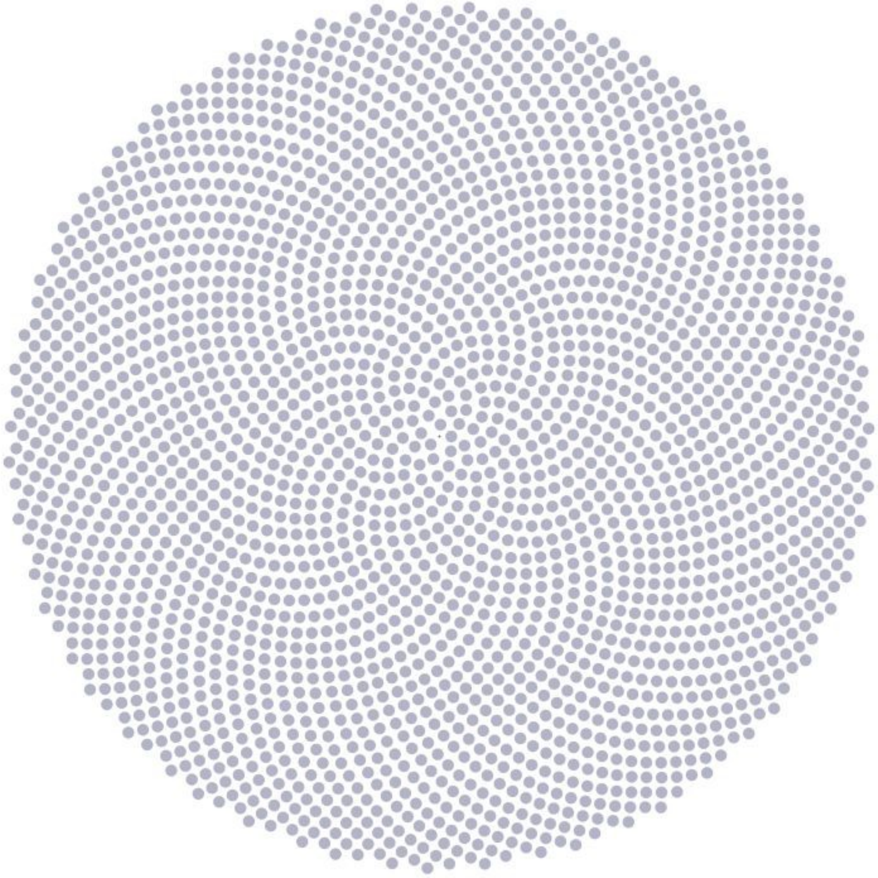
https://www.univ-rouen.fr/actualites/la-vraie-nature-du-nombre-dor/

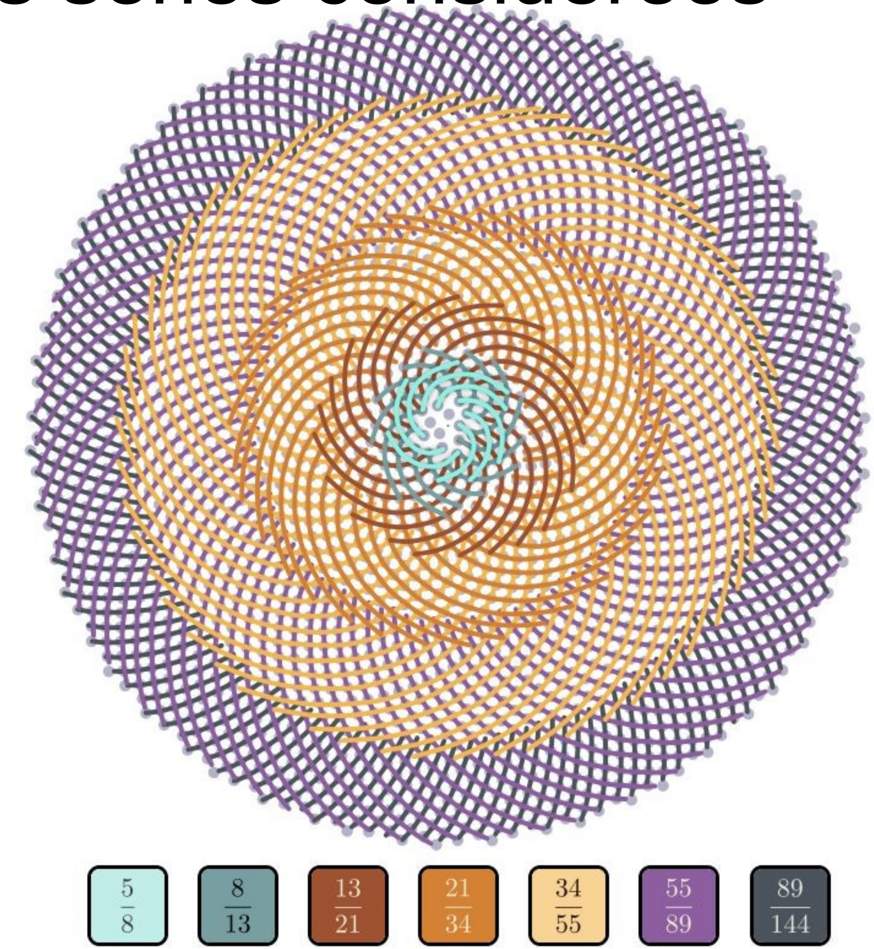
Le tournesol

- Différents termes selon les séries considérées

Le tournesol (simulation)

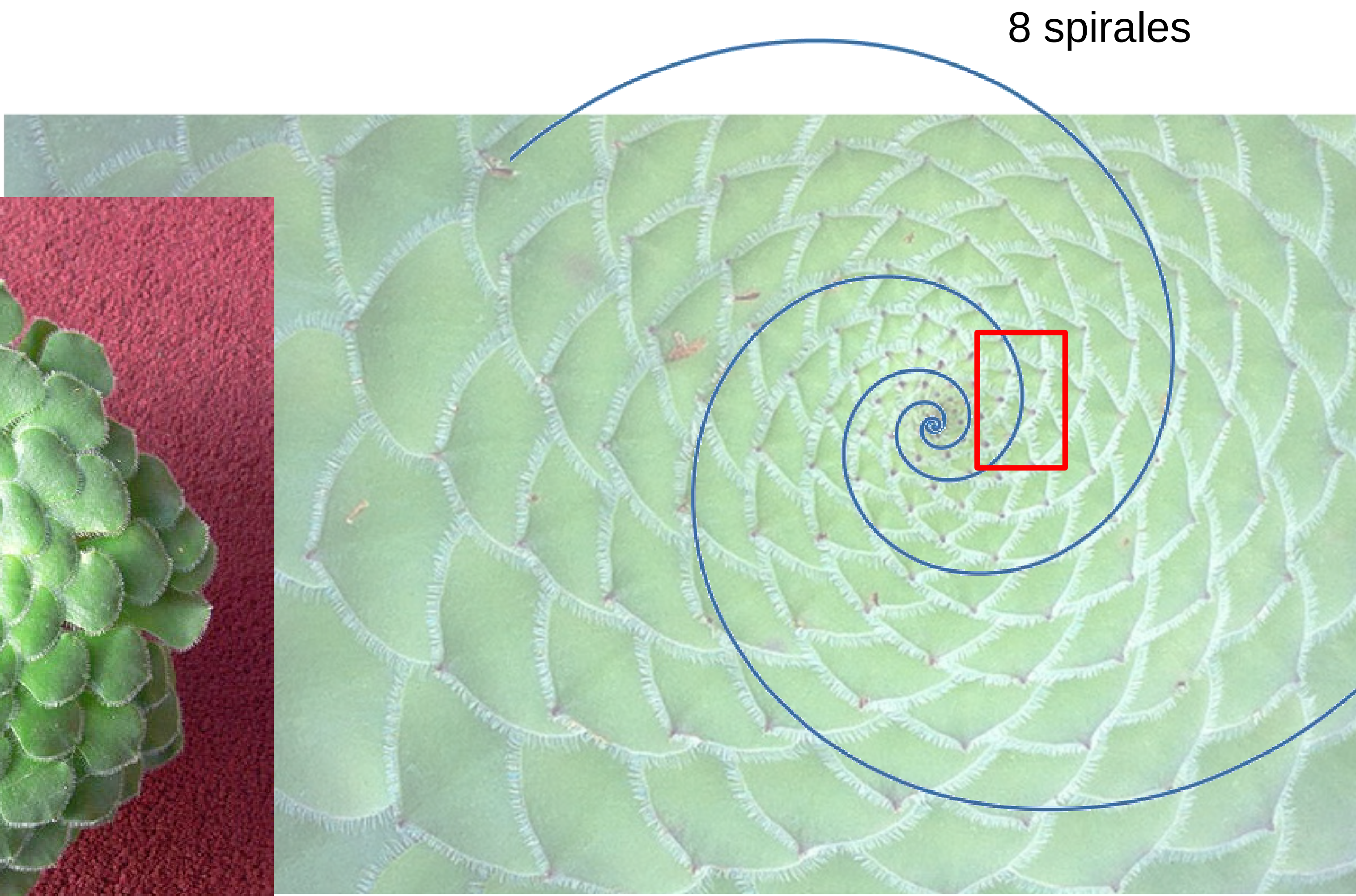
Différents termes selon les séries considérées



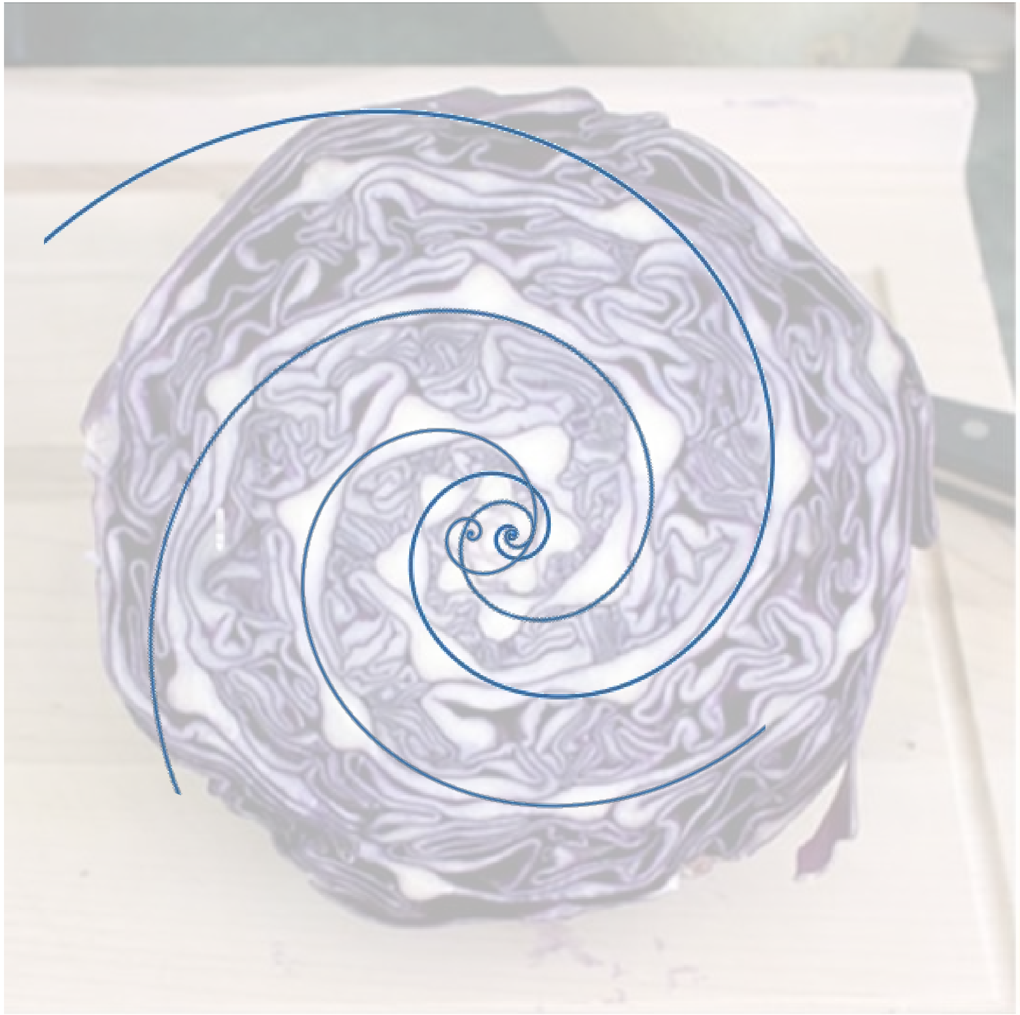


https://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/SpiralesFibo/explications_spirales.html

Aeonium tabuliforme



Chou rouge



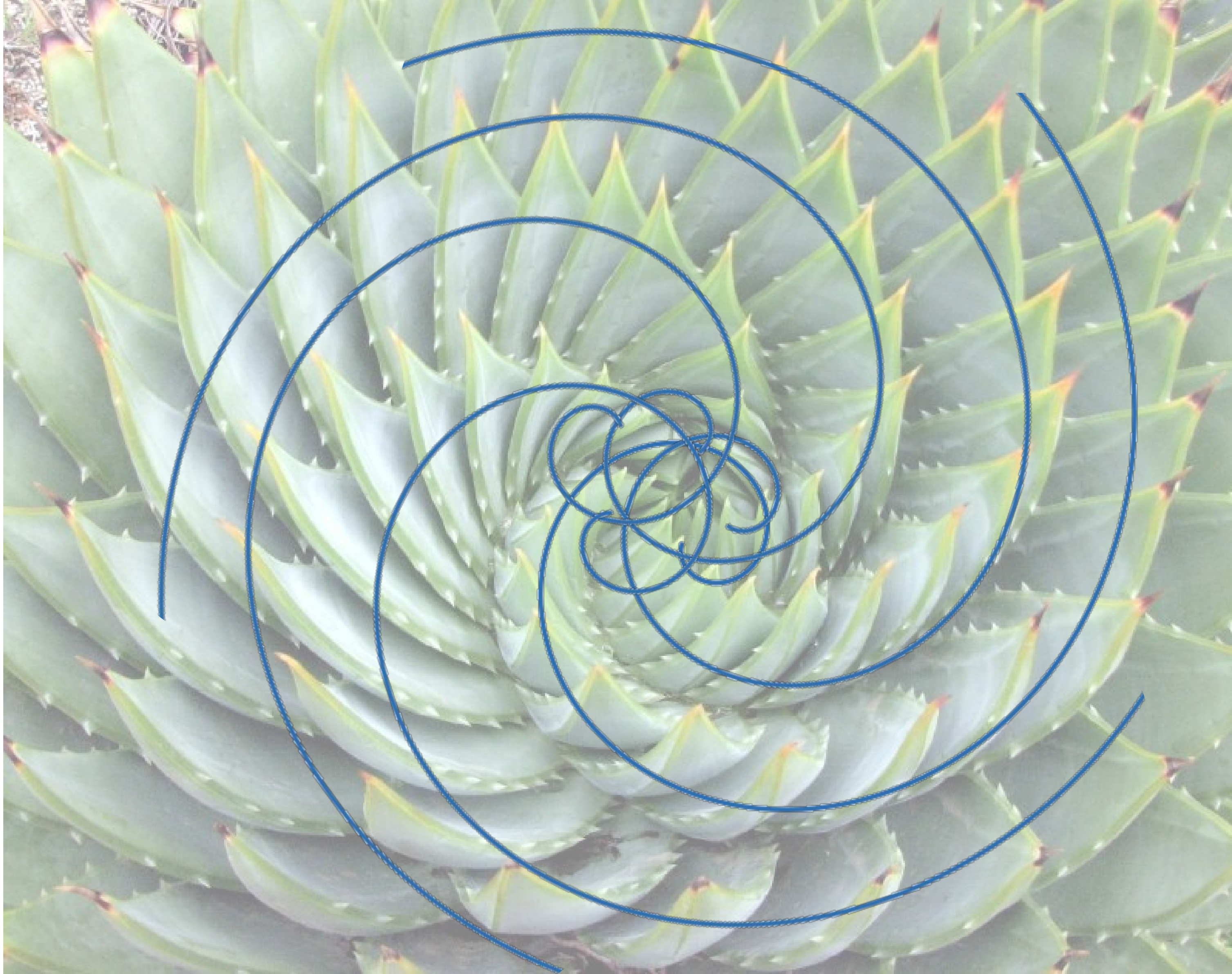
This perfect Fibonacci spiral on my red cabbage

Perfect ??

https://www.math.uni-leipzig.de/UAA/f/SS20XX15548.pdf https://www.reddit.com/r/mildlyinteresting/comments/o4btyx/this_perfect_fibonacci_spiral_on_my_red_cabbage/

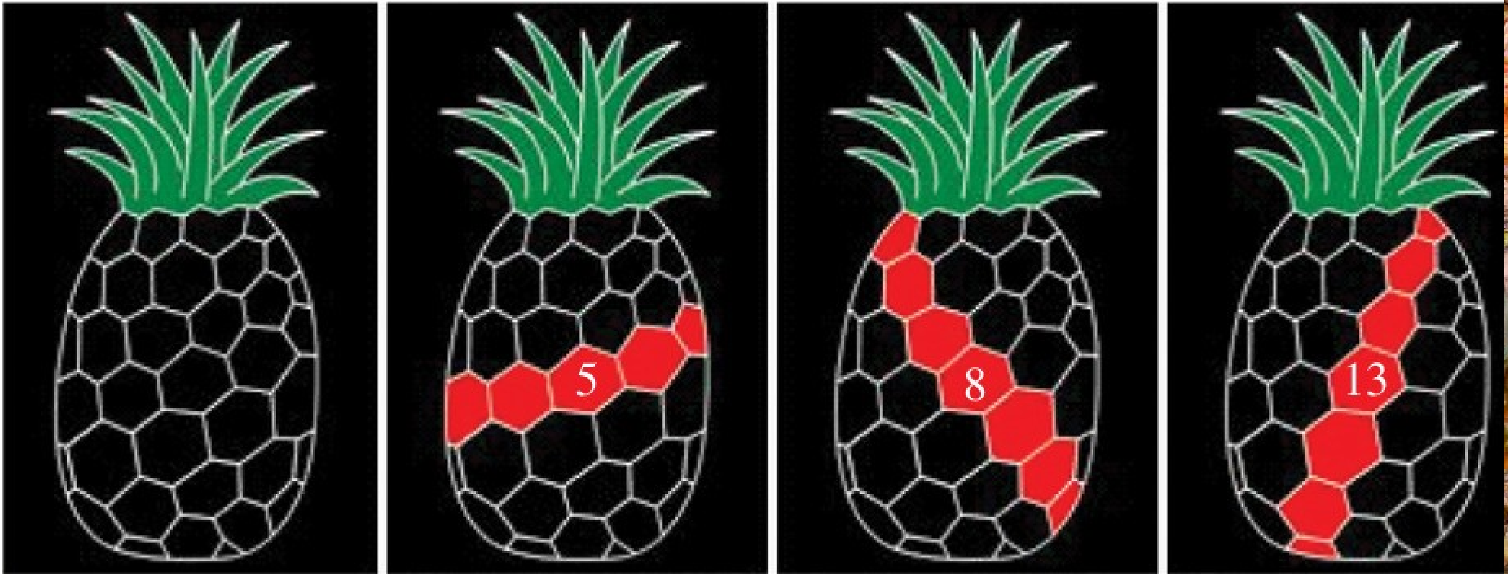
Aloe polyphylla

5 « spirales » mais pas (tout à fait) d’or...



L’ananas

https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2018.0274
https://www.mon-marche.fr/produit/l-ananas-pain-de-sucre



Le corps humain

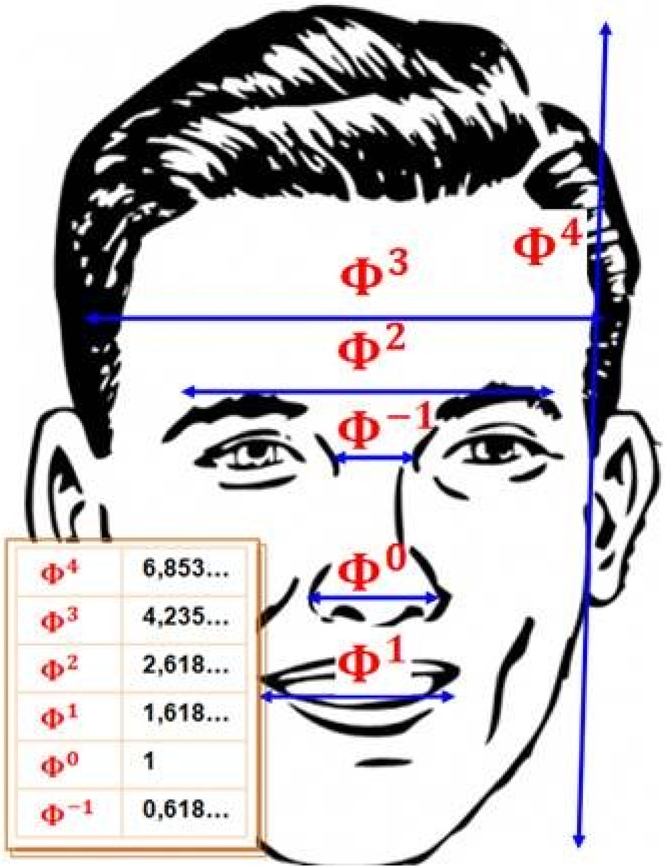
Proportions du visage

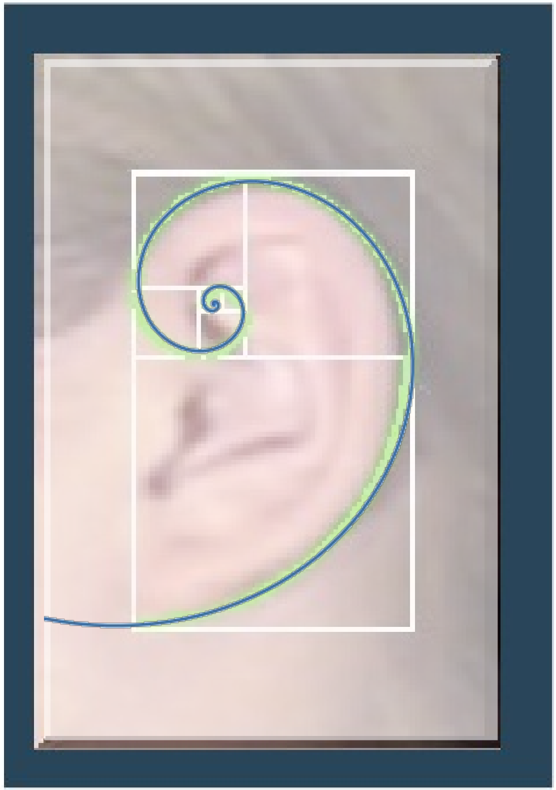
- <u>Vidéo :</u>
  - « Le rapport 1,618 fonctionne vraiment »
  - « Le ratio de 1,618 s'applique à toutes les parties du corps »
  - « Sur un **beau** visage, la largeur de la bouche correspond **exactement** à 1,618 fois la largeur du nez »
  - « Incisive 1 = 1,618 x plus large que incisive 2 »
- <u>Moâ :</u>
  - bouche ≈ 5,5 cm, nez ≈ 3,5 cm
  - → ratio = 11/7 = 1,57 (≈ π /2 → nez grec ??)
- Admettons que ma bouche mesure **précisément** 5,500 cm
  - Q1 : comment mesurer avec cette précision ?
    (instrument de mesure, définition photo, coin de la bouche)
  - Q2 : comment déterminer si mon nez mesure :
    - 5,500 / 1,618 = 3,399 cm
    - 5,500 / 1,617 = 3,401 cm
    - 5,500 / 1,619 = 3,397 cm
    - Δ = 0,004 cm = 0,04 mm = 40 µm < diamètre d'un cheveu !
  - Largeur incisive = 8-9 mm, 6 fois moins, donc précision doit être 6 x supérieure = 6-7 µm
- **Une telle précision n'a aucun sens !**

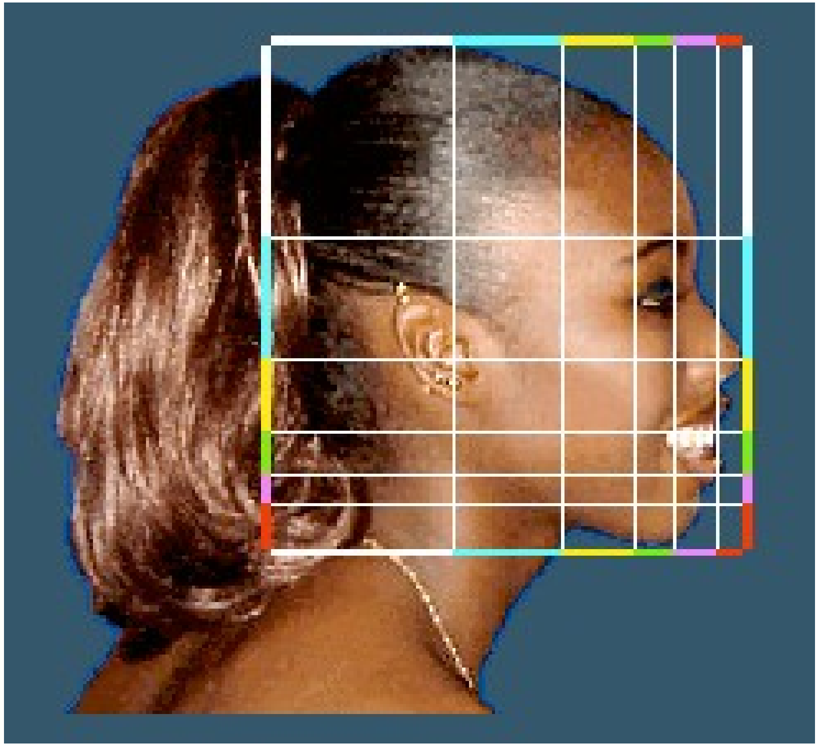
φ = 1,6180...

youtube.com/watch?v=v5TaiKC7QuA

Proportions du visage

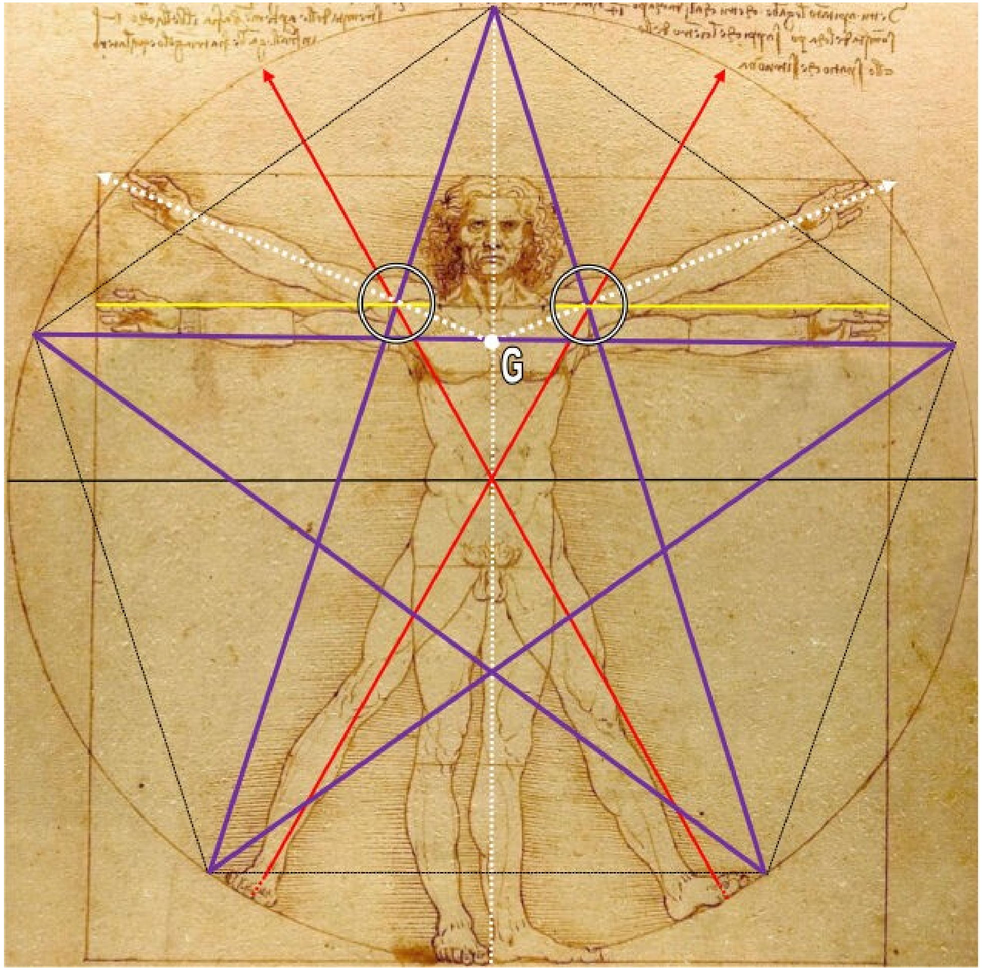


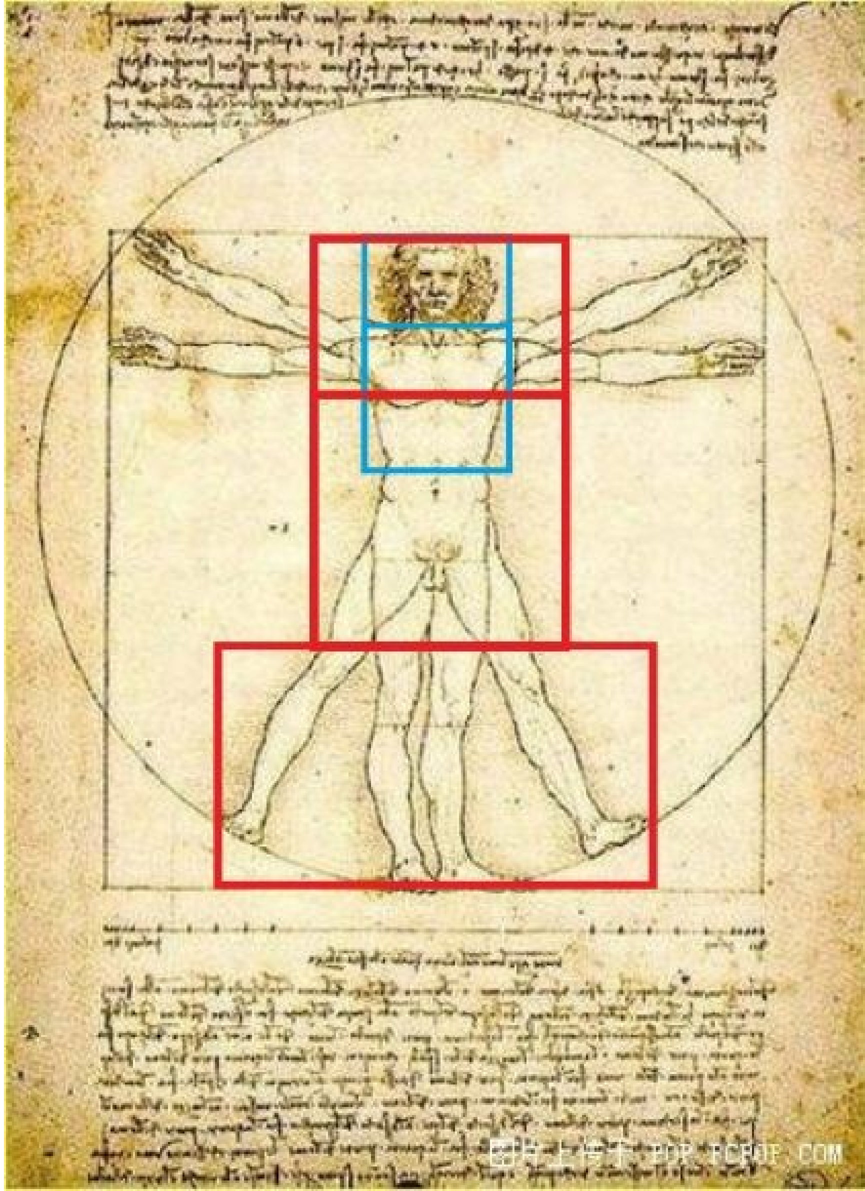




http://villemin.gerard.free.fr/Biologie/CorpsPro.htm#visage
http://kafemath.fr/2004-2005/0503-07mars/nombre-dor.pdf

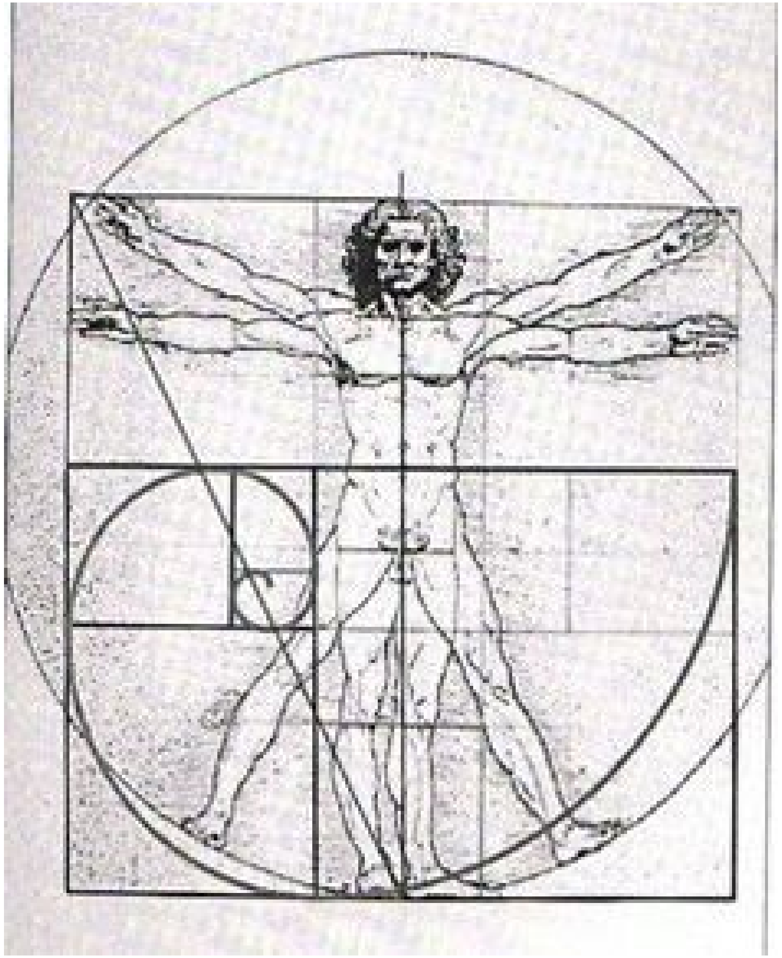
L'homme de Vitruve



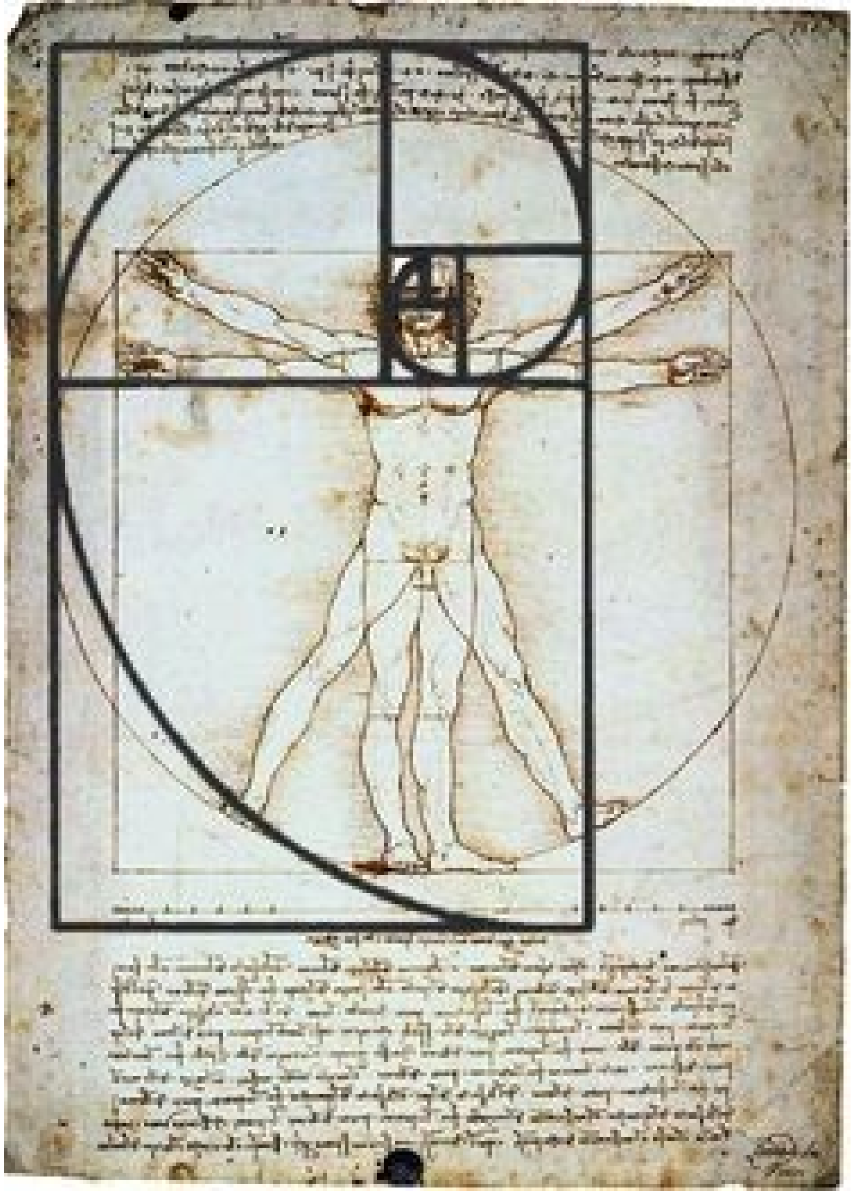


Source non trouvée & https://www.pinterest.fr/ram42/lhomme-de-vitruve-the-vitruvian-man/

L’homme de Vitruve

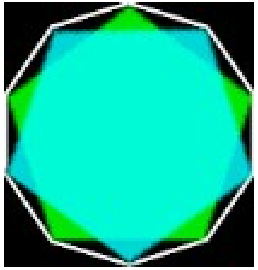


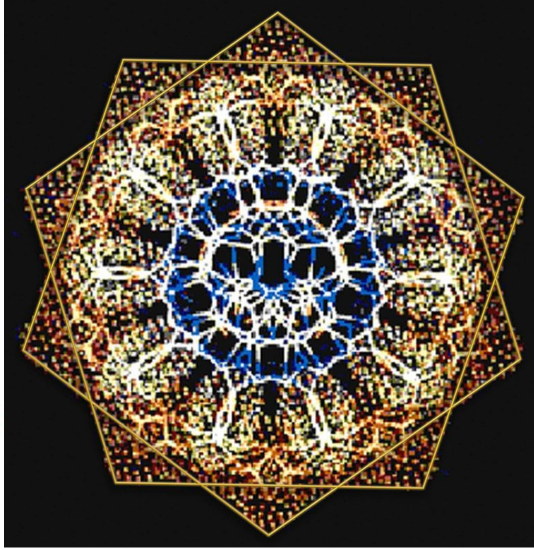
https://www.pinterest.fr/pin/845691636253853565/



https://www.pinterest.co.uk/richardcandela/physique/

ADN et nombre d’or 1

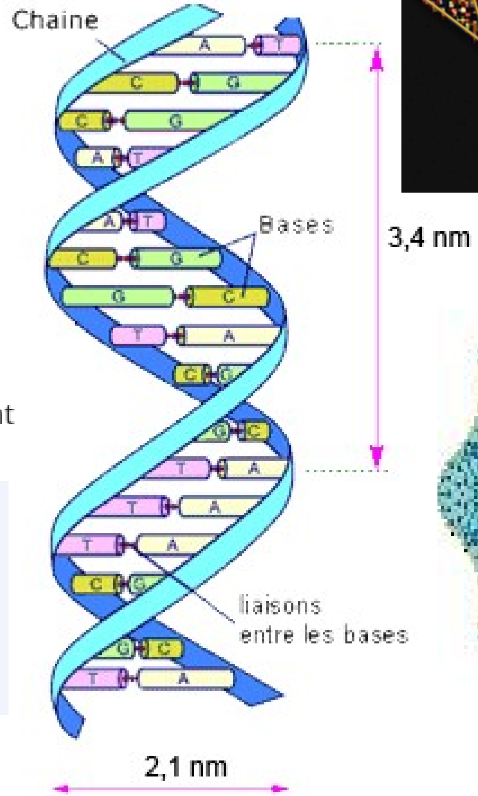




- Images présentées sur certains sites mais source impossible à retrouver
  - Google image, extension Firefox « Search by image »
- 21 et 34 sont des termes de la suite de Fibonacci
- Mais !
  - Dim. pas extrêmement précises / définies / partagées
  - La mesure de 1953 est souvent citée !

bonds. Both chains are coiled around the same axis, and have the same pitch of 34 ångströms (3.4 nm). The pair of chains have a radius of 10 Å (1.0 nm).[9] According to another study, when measured in a different solution, the DNA chain measured 22–26 Å (2.2–2.6 nm) wide, and one nucleotide unit measured 3.3 Å (0.33 nm) long.[10] The buoyant density of most DNA is 1.7g/cm^3.[11]

9. ^ a b c d Watson JD, Crick FH (April 1953). "Molecular structure of nucleic acids; a structure for deoxyribose nucleic acid" (PDF). *Nature*. **171** (4356): 737–38. Bibcode:1953Natur.171..737W. doi:10.1038/171737a0. ISSN 0028-0836. PMID 13054692. S2CID 4253007. Archived (PDF) from the original on 4 February 2007.



https://compterlebeau.weebly.com/hum-animal.html
https://sciencesdesorigines.fr/wp-content/uploads/2015/09/Le-nombre-dor-et-les-math%C3%A9matiques-dans-la-nature-5.09.-2015.pdf

ADN et nombre d’or 2

- L’ADN peut prendre 3 formes (« conformations ») : A, B et Z (zig-zag) : sym. d’ordre 11, 10, 6
  - B étant la plus courante car taux d’hydratation élevé dans les cellules
  - Seules formes B et Z observées in vivo
  - Forme A la plus compacte, uniquement trouvée dans un environnement faible en eau

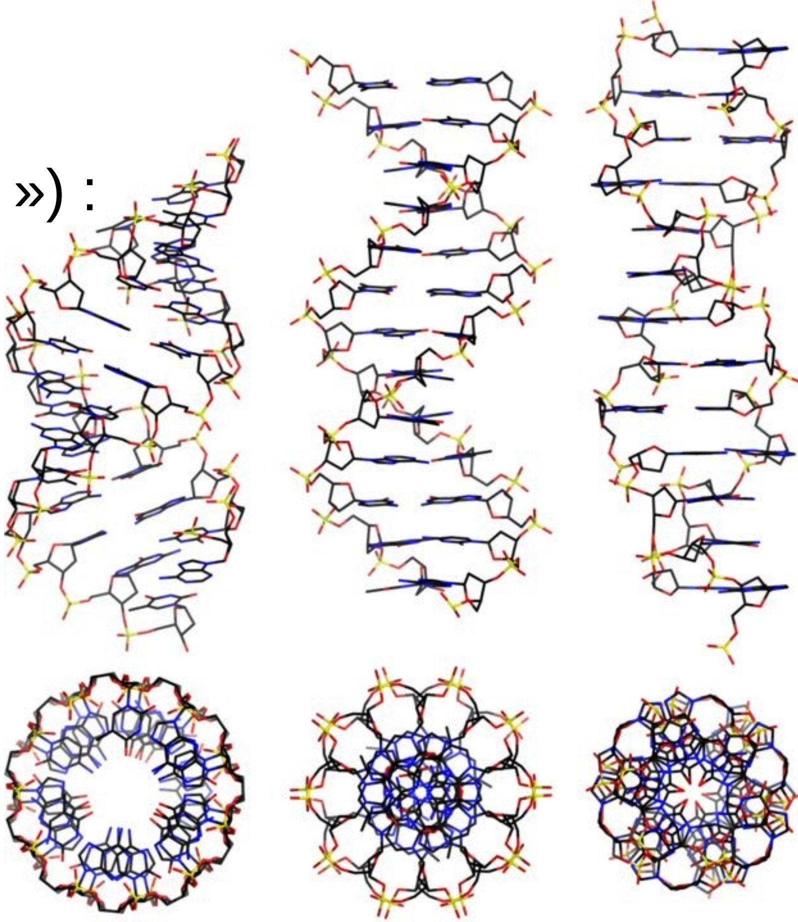


Tableau 1 : Caractéristiques des trois types de double hélice d’ADN A, B et Z

	A	B	Z	
Sens de l’hélice	Droite	Droite	Gauche	
Pas de l’hélice (Å)	28	34	44	
Torsion (°)	32-33	36	CG : -15	GC : -45
Sucre	C3’ endo	C2’ endo	Purine C3’ endo	Pyrimidine C2’ endo
Dist. P-P intrabrin (Å)	5,9	7,0	-	
Diamètre (Å)	23	20	18	

Ratio = 1,7

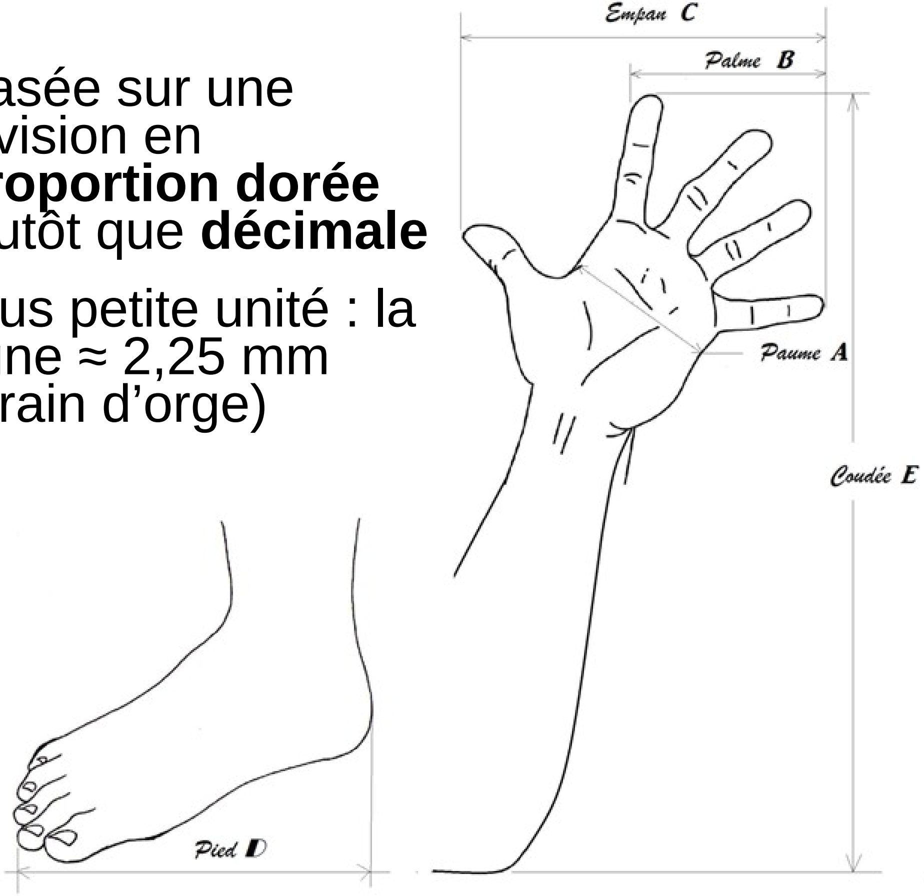
https://sci-hub.se/10.1126/science.7071593

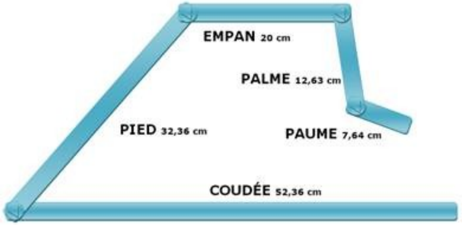
https://www.researchgate.net/publication/325956424_Etude_des_ADN_glycosylases_de_la_superfamille_structurale_FpgNei_par_modelisation_moleculaire_de_nouvelles_cibles_therapeutiques_potentielles_dans_les_strategies_anti-cancer

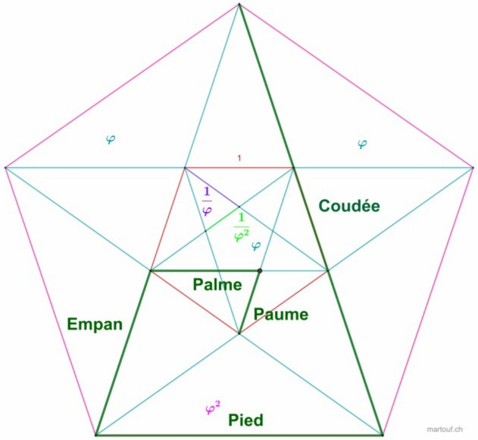
Architecture

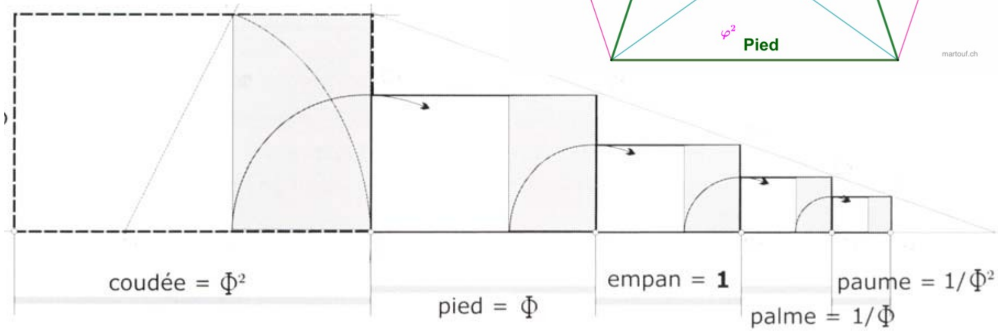
Quine des bâtisseurs

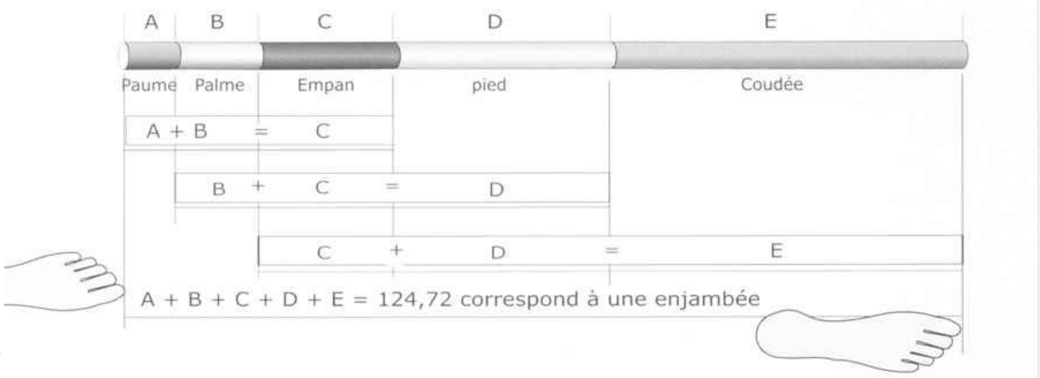
- Basée sur une division en **proportion dorée** plutôt que **décimale**
- Plus petite unité : la ligne ≈ 2,25 mm (grain d’orge)







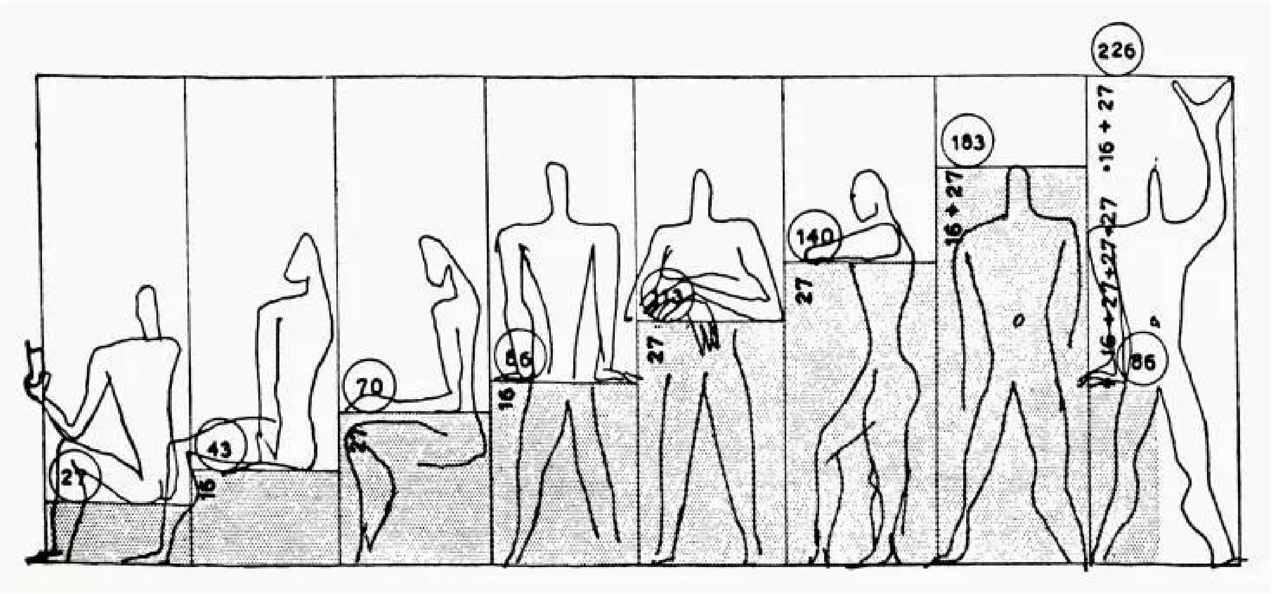


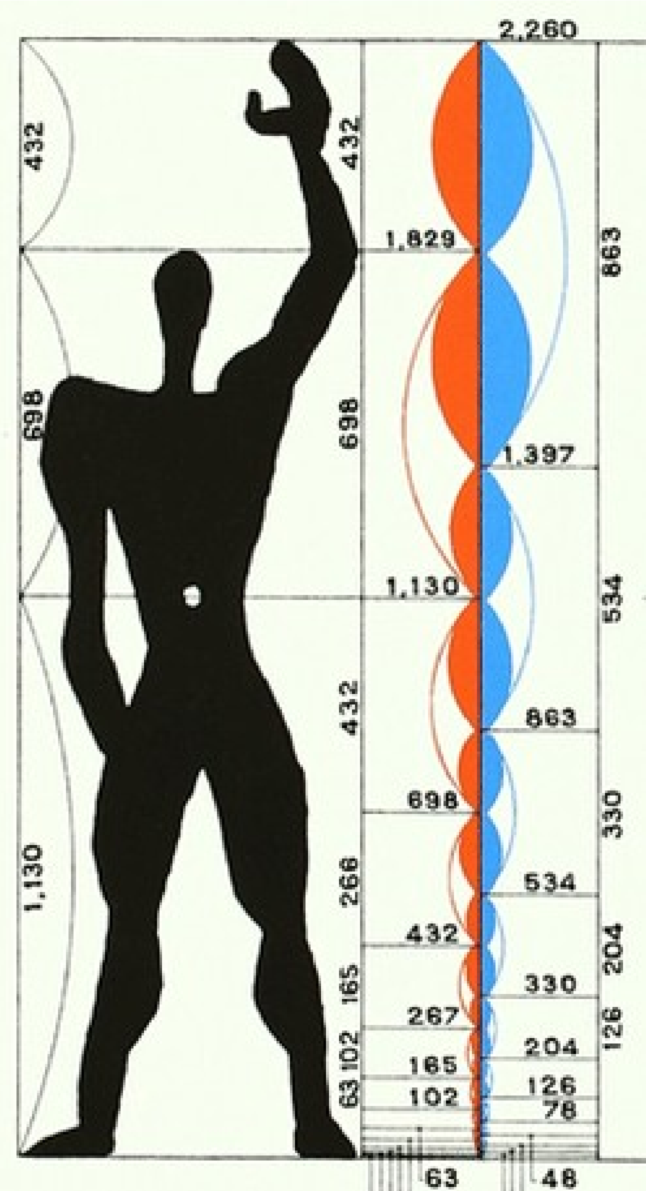


http://villemin.gerard.free.fr/Biologie/Vitruve.htm https://r2math.ensfea.fr/wp-content/uploads/sites/8/2010/07/12-4-rectangledor.pdf
https://martouf.ch/crac/index.php?title=Quine_des_b%C3%A2tisseurs https://www.duboysfresney.fr/index.php?page=docu3062

Le modulor

- Le Corbusier (1945) : = « module + nombre d’or »
- <u>But :</u> développer un système plus adapté à la morphologie humaine que le système métrique
- Basé sur une silhouette humaine standardisée dont les proportions sont basées sur 2 et le nombre d’or (ex : 1,829/1,130=1,618)



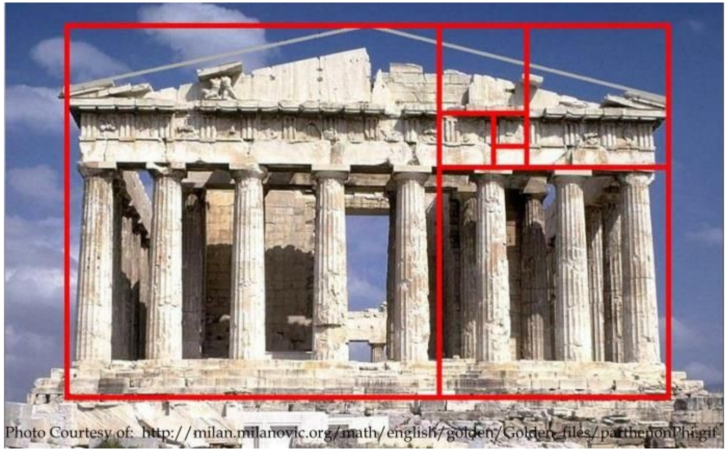


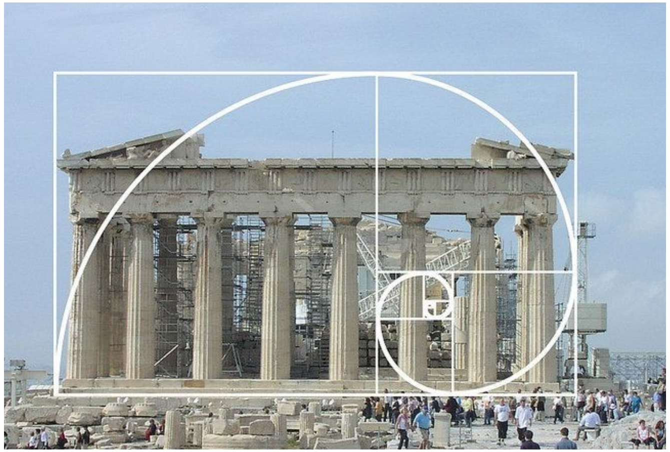
Le théâtre d’Epidaure

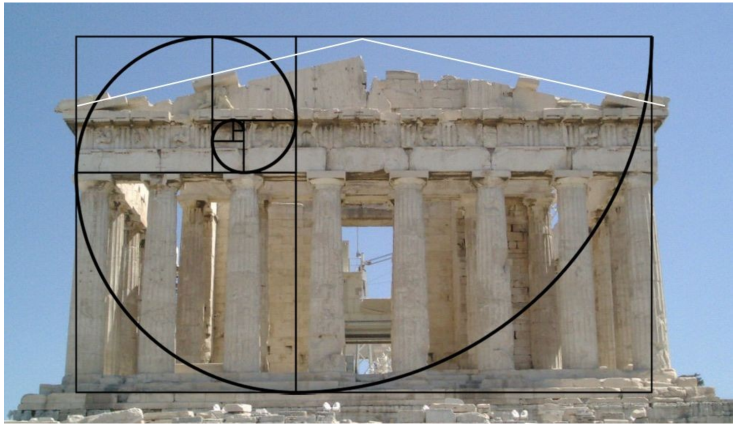
55 = 21 + 34 gradins → partagés en « extrême » et « moyenne » raisons

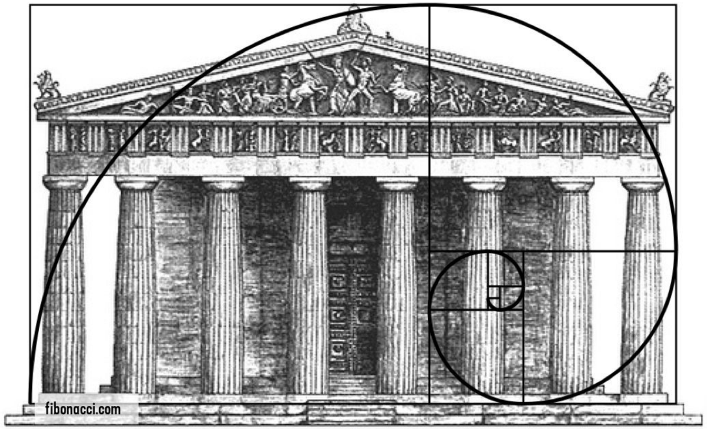
visitworldheritage.com/fr/eu/festival-depidaure/0a2b1b4d-b47b-4581-8b70-34f0a8cd4ff2 whitman.edu/theatre/theatretour/epidaurus/maps/epidaurus.map.htm

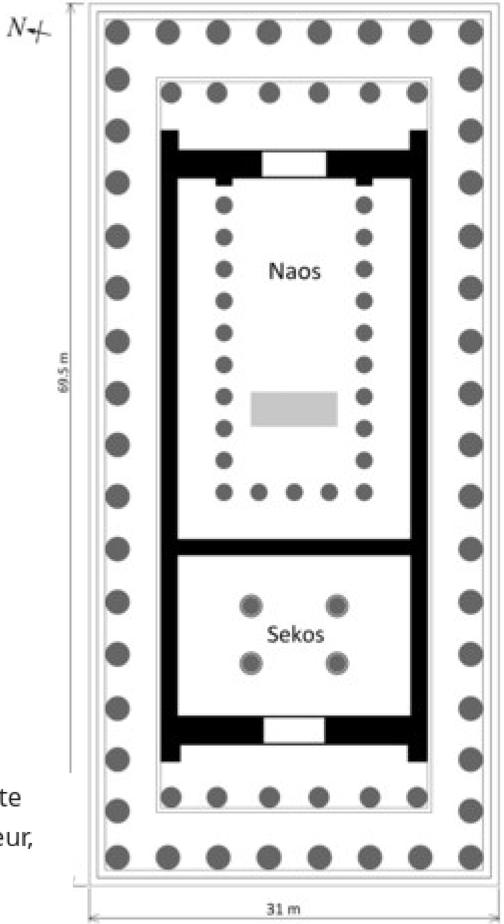
Le Parthénon











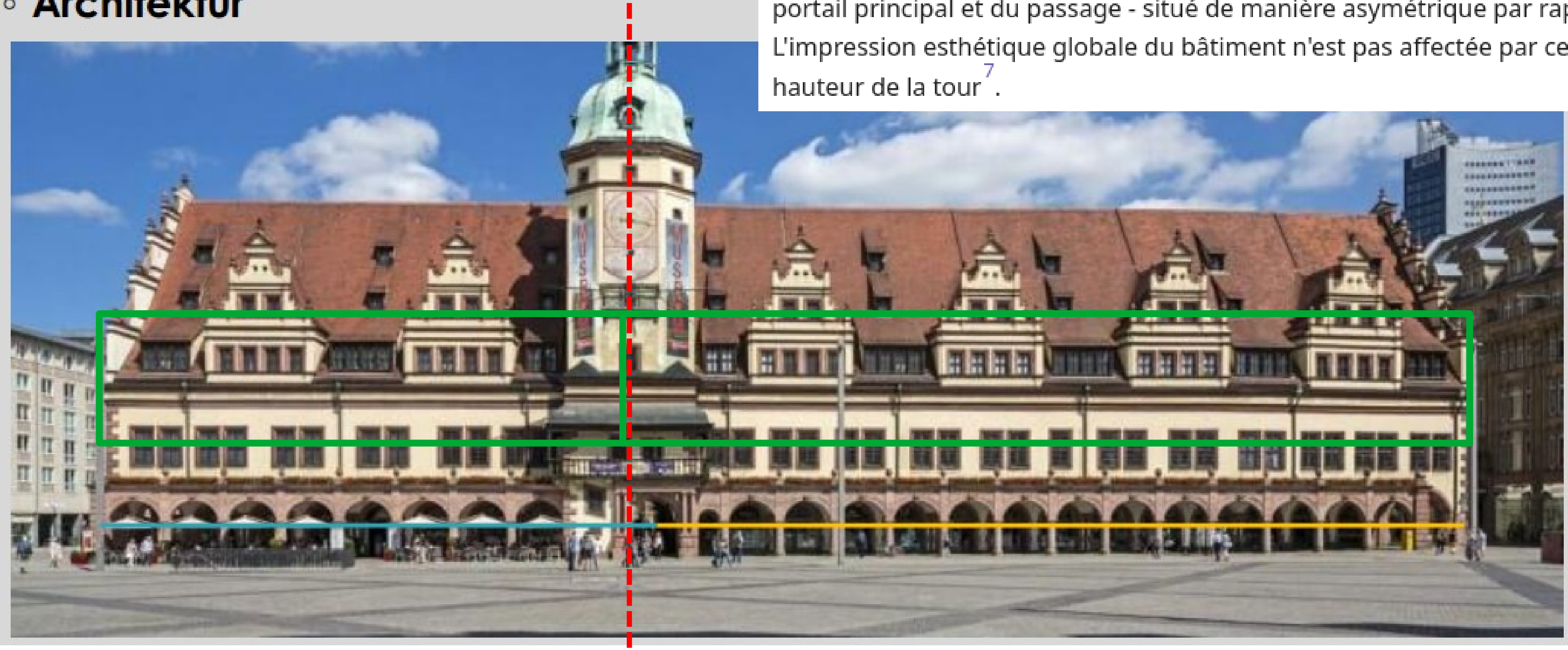
Bien que le nombre d'or ait pu être remarqué dans les rapports de certaines longueurs, il existe un autre rapport qui est de 4/9[25]. En effet, lorsqu'on divise la largeur de l'édifice par sa longueur, le résultat est de l'ordre de 4/9 : on retrouve ce rapport entre la largeur des colonnes et la distance qui les sépare, ainsi qu'entre la hauteur de la façade et sa largeur[26].

infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-zolotoe-sechenie-5519586.html wikipedia.org/wiki/Parth%C3%A9non fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d%27or
slideserve.com/talon-cook/the-golden-ratio-in-art-and-architecture blog.photo24.fr/nombre-dor-quest-ce-que-cest/ pinterest.es/pin/592504894705122020/

Ancien hôtel de ville de Leipzig

Ce qui est remarquable, c'est la structure asymétrique du bâtiment de l'avant et de l'arrière, le divisant approximativement en nombre d'or. Lors des transformations effectuées par Hieronymus Lotter en 1556/57, les bâtiments existants et leurs fondations donnent à la façade ses dimensions actuelles. On suppose souvent que la tour de l'ancien hôtel de ville, qui est décalée latéralement vers la gauche, marque les proportions du nombre d'or du bâtiment. Cependant, la division réelle du front d'habitation vers le marché en termes de nombre d'or est réalisée par le centre du portail principal et du passage - situé de manière asymétrique par rapport à la tour. L'impression esthétique globale du bâtiment n'est pas affectée par ce fait lié à la hauteur de la tour[7].

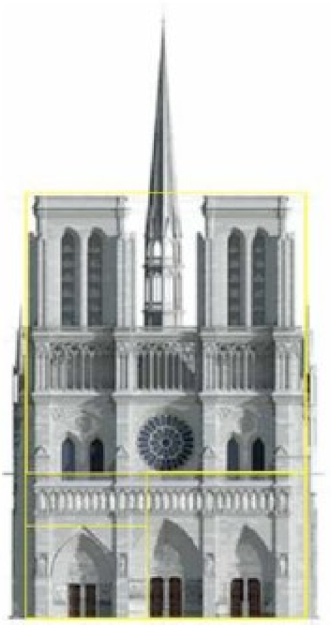
◦ **Architektur**

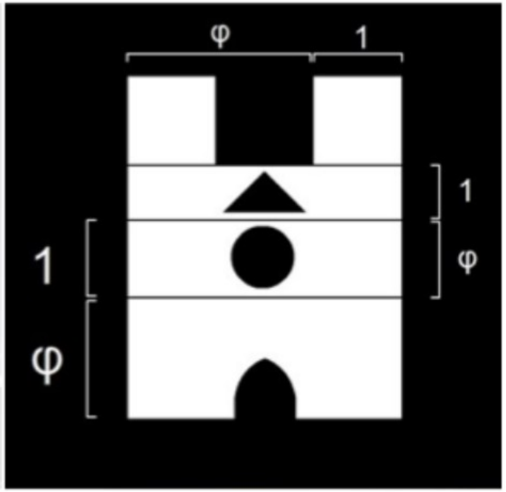


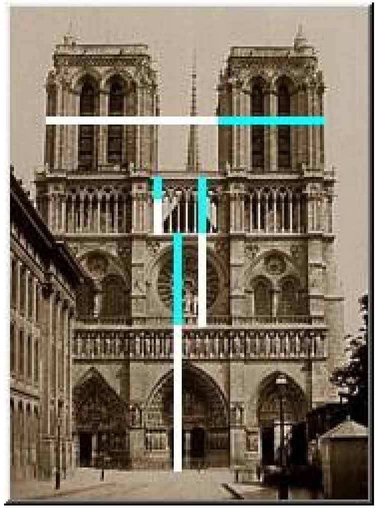
$25{,}3/17{,}5 \approx 1{,}45 \neq \varphi$ + **centrage** ? + **perspective de la photo ?**

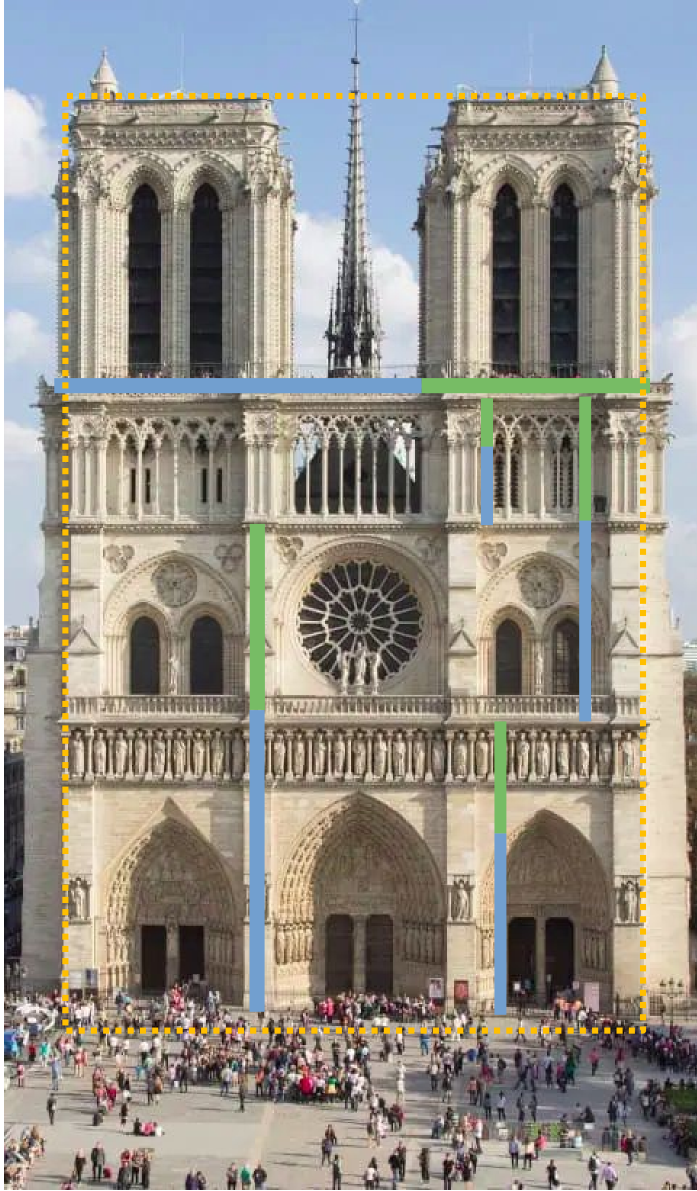
https://www.math.uni-leipzig.de/UAA/f/SS20XX15548.pdf

Notre Dame de Paris



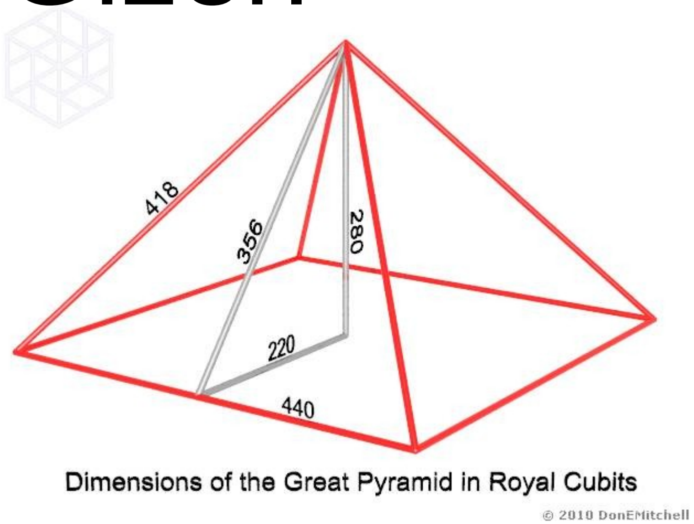


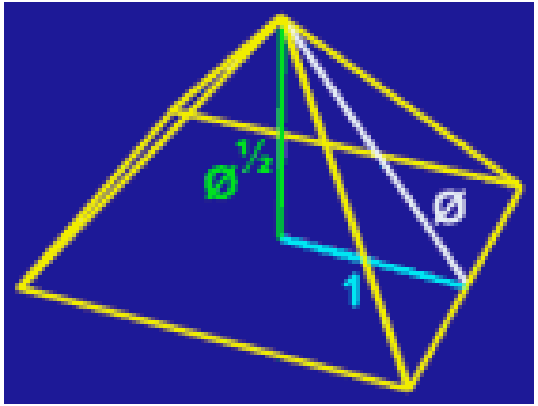




https://www.goldennumber.net/world-trade-center-proposal/
https://clg-amandiers-carrieres.ac-versailles.fr/IMG/pdf/le_nombre_d_or_2.pdf
https://www.notredamedeparis.fr/comprendre/architecture/la-facade-occidentale/#

Les pyramides de Gizeh





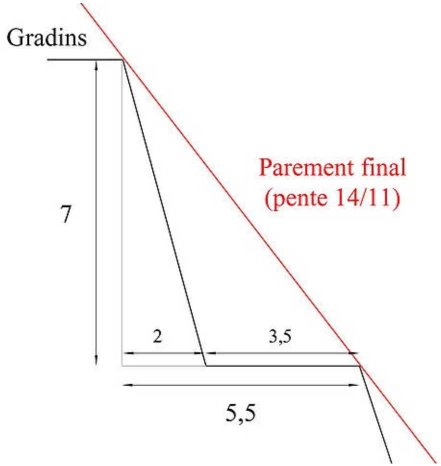
- Pyramide de Kheops (en coudées royales égyptiennes) :
  - Base : 440 (230 m)
  - Hauteur : 280 (146 m)
  - Th. de Pythagore → apothème = sommet-milieu d’un côté : 356
- Ratios :
  - 280/220 = 1,2727 ≈ $\sqrt{\varphi}$ & 356/220 = 1,618 ≈ φ

https://recreationalmathematics.neocities.org/GoldenRatio-Architecture
https://www.goldennumber.net/world-trade-center-proposal/

Mais !

- Nombre d’or = en général ratio longueur/largeur, ici diagonale
- Wikipedia (EN) :
  - **L'imprécision des mesures**, due en partie à **l'enlèvement de la surface extérieure de la pyramide**, empêche de **distinguer cette théorie** d'autres théories numériques des proportions de la pyramide, **basées sur π ou sur des rapports de nombres entiers**.
  - Les spécialistes modernes s'accordent à dire que les proportions de cette pyramide **ne sont pas basées sur le nombre d'o**r, car une telle base serait **incompatible** à la fois avec ce que l'on sait des **mathématiques égyptiennes** de l'époque de la construction de la pyramide et avec les **théories égyptiennes de l'architecture et des proportions utilisées dans d'autres œuvres**.
- 440/280 → pente de 280/220 = 14/11
  - Déjà rencontrée sur la pyramide de Meïdoum, antérieure

$$\frac{\sqrt{14^2+11^2}}{11}=1{,}61859 \text{ et } \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803$$



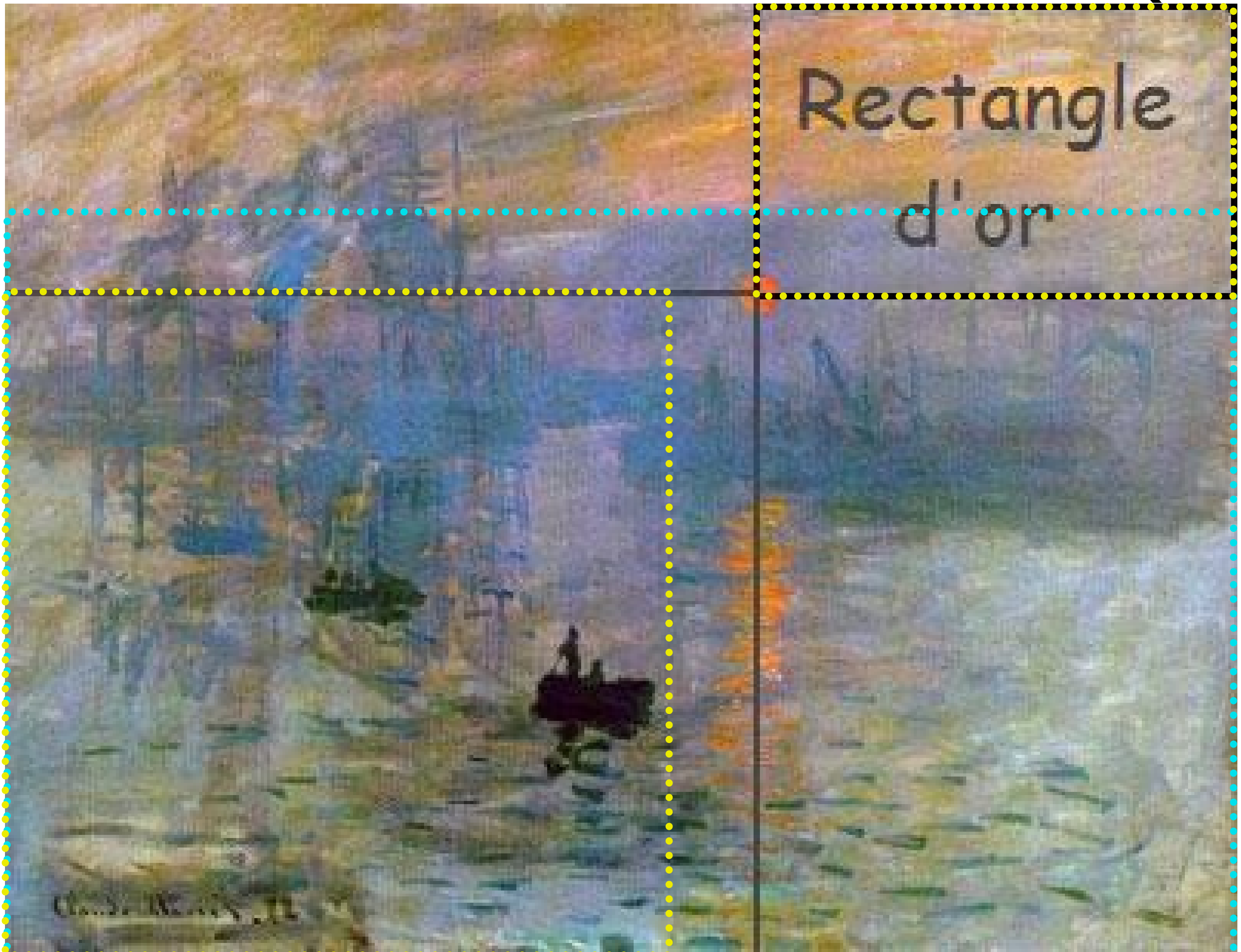
https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

Et les autres ?

- Kephren
  - ~ 215,7 m x 143,9 m
    → pente de 3/4
- Mykerinos
  - ~ 105,5 m x 65,2 m
    → pente de 1,618 / 2
- Dahchour : pyramide rhomboïdale & pyramide rouge

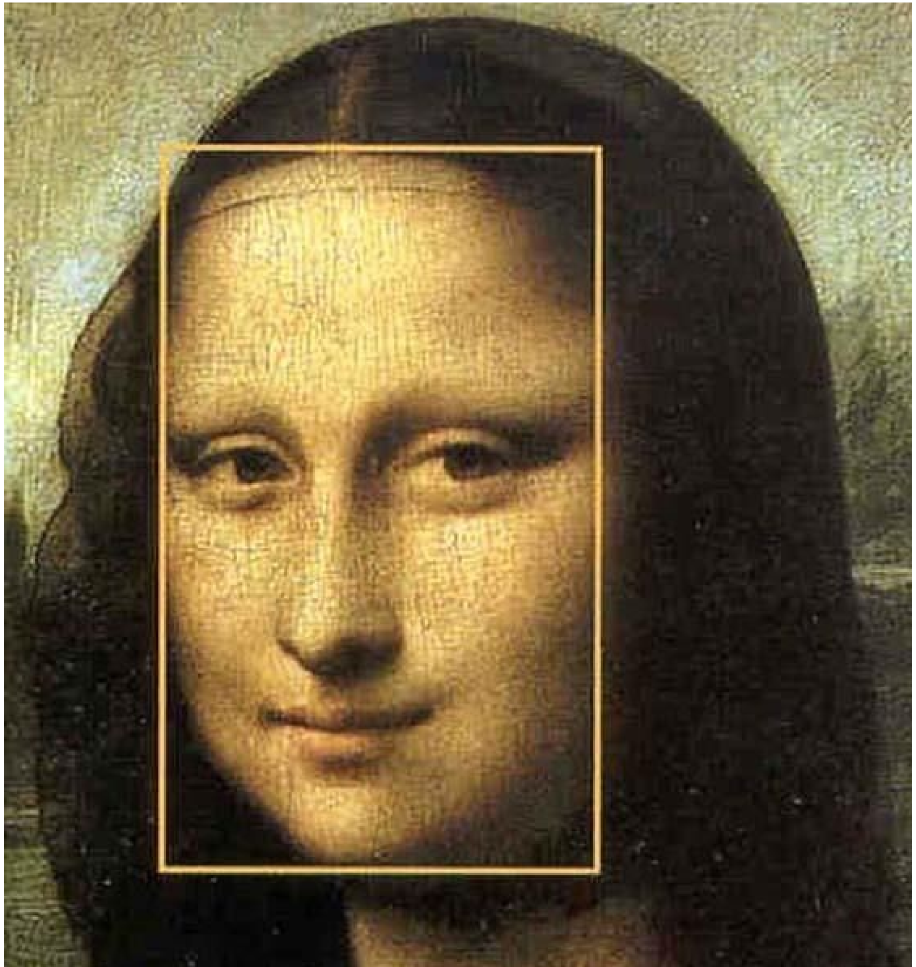
Art

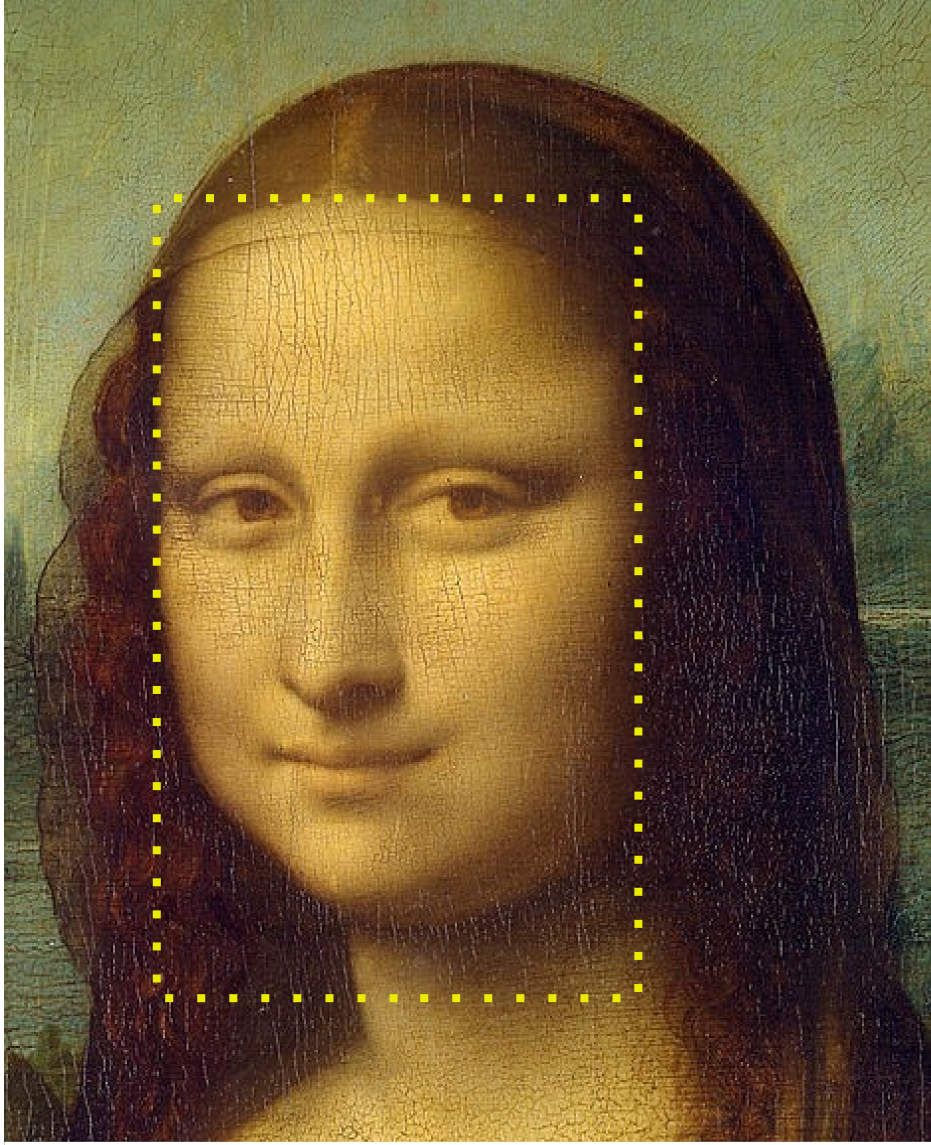
« Soleil couchant », Monet (1873)



nombre-dor.wifeo.com/art.php

La Joconde

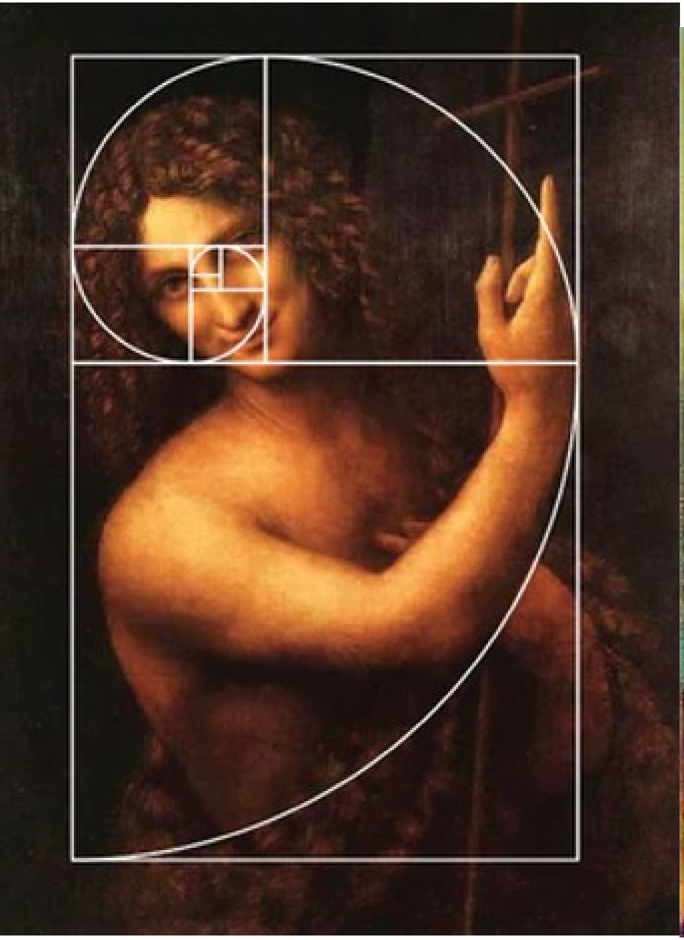


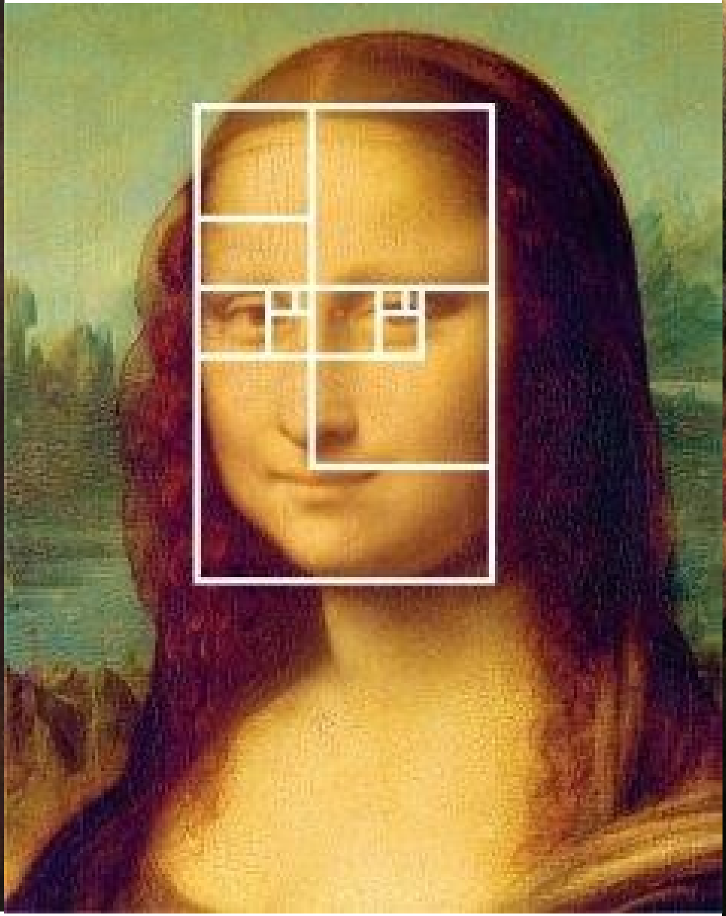


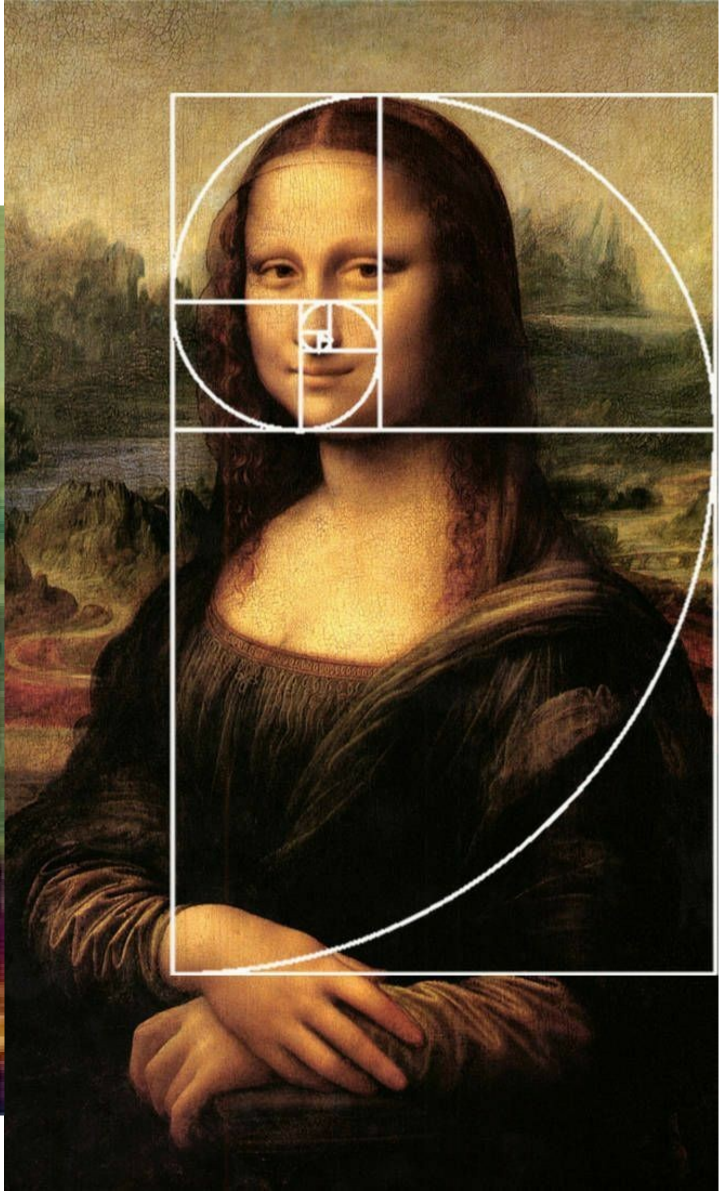
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Fichier:Mona_Lisa_detail_face.jpg

Conclusion

Est-il partout ?





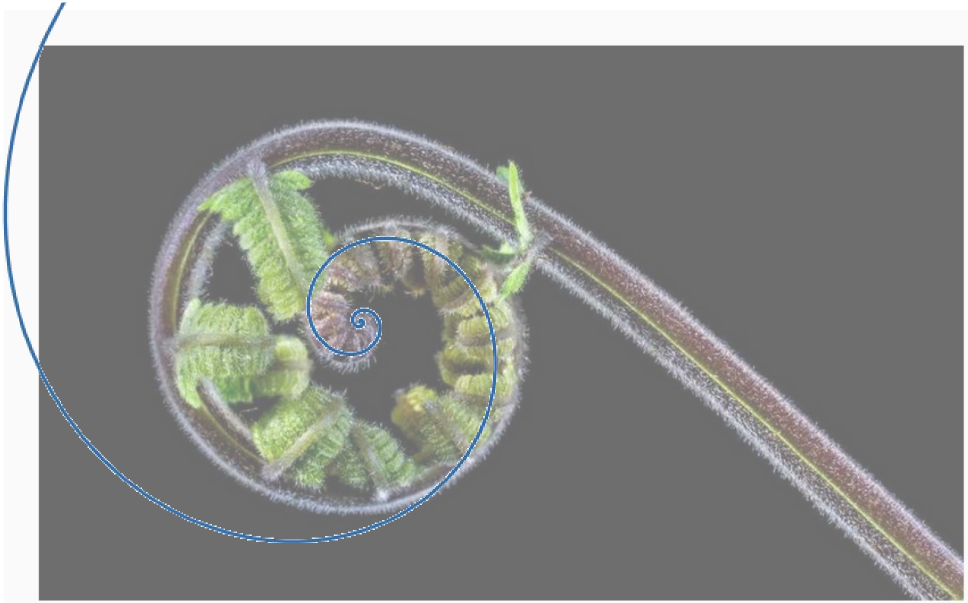


https://micheldbhistoiredelart.over-blog.com/2023/11/nombre-d-or.html

Non, pas partout

- Une spirale n’est pas nécessairement d’or, et donc pas liée à φ

▪ Nombre d’or dans la queue d’un caméléon



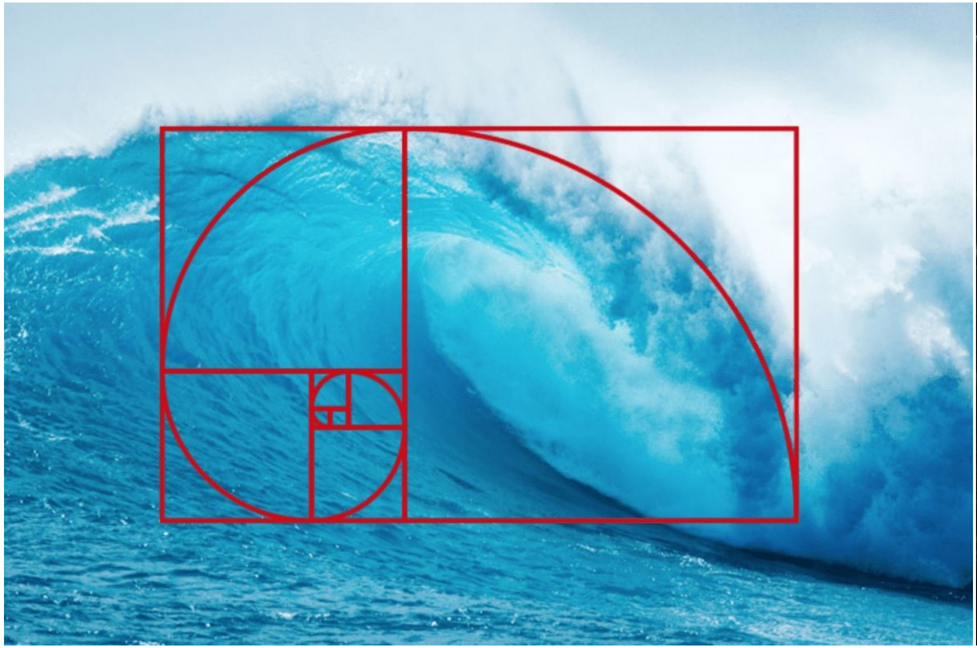
Crédits images : Pexels / Pixabay

Les boutons des fougères offrent également un autre exemple fascinant de la présence de la suite de Fibonacci dans la nature. Lorsque les frondes (organes de la plante) d’une fougère se déploient, elles émergent souvent d’un bourgeon enroulé. Si vous examinez la disposition des segments de ce bourgeon, vous pouvez constater qu’ils sont en forme de spirale. Ils suivent en effet une progression qui semble correspondre à la séquence de Fibonacci.

https://sain-et-naturel.ouest-france.fr/nombre-d-or.html

Non, pas partout

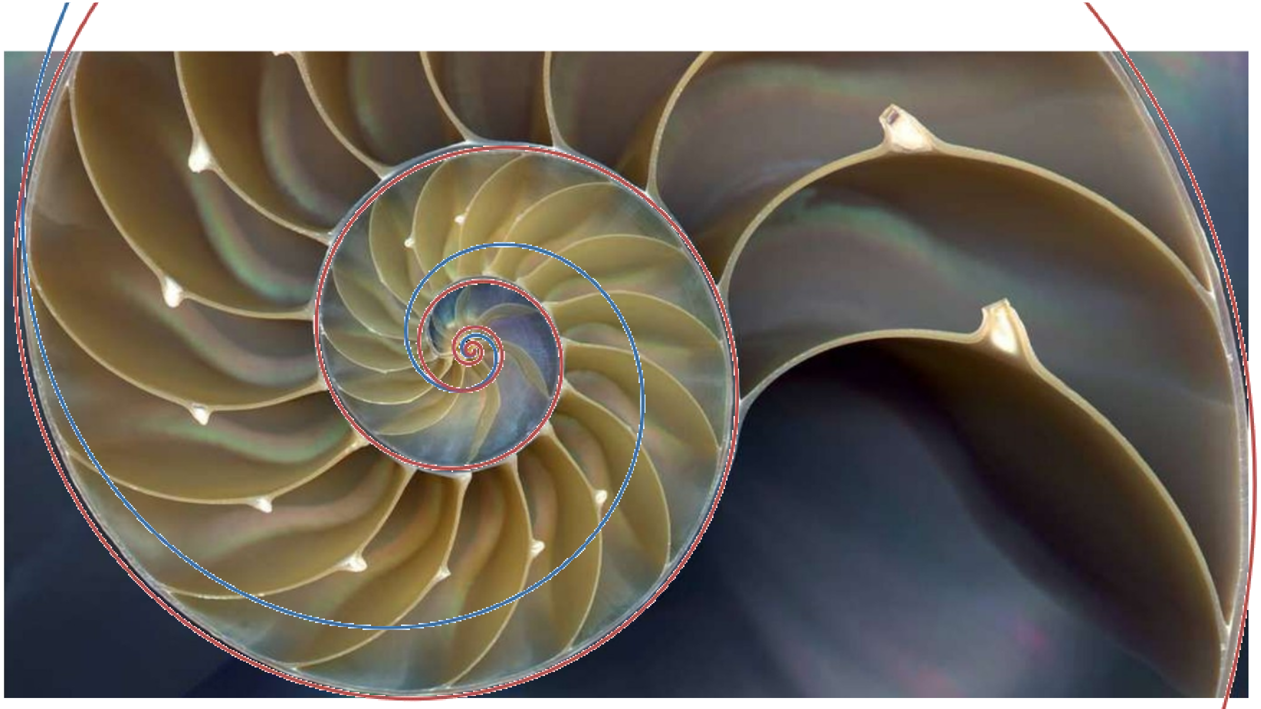
- Un « tube » n’est pas une spirale
  - Prendre en compte l’angle de la prise de vue



https://innersense-inc.com/shape-of-the-golden-ratio/
https://www.theinertia.com/surf/inside-the-tube/

Non, pas partout

- **Attention aux biais** = ne remarquer/garder que les éléments qui ont ces caractéristiques
- **Tentation d'essentialisation** : nature = nb d'or = nécessairement ordre ± caché
- Communion entre les grands esprits / les grandes civilisations
- Incertitude : 1,618 ± 5 % = 1,54 – 1,70 ; 3/2 = 1,5, 5/3 = 1,66, 8/5 = 1,6, ...



- Ce qui n'empêche pas du tout de s'émerveiller devant la beauté et l' « intelligence » de la nature !

https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio#Disputed_observations