Suite de Fibonacci et nombre d’or (1)

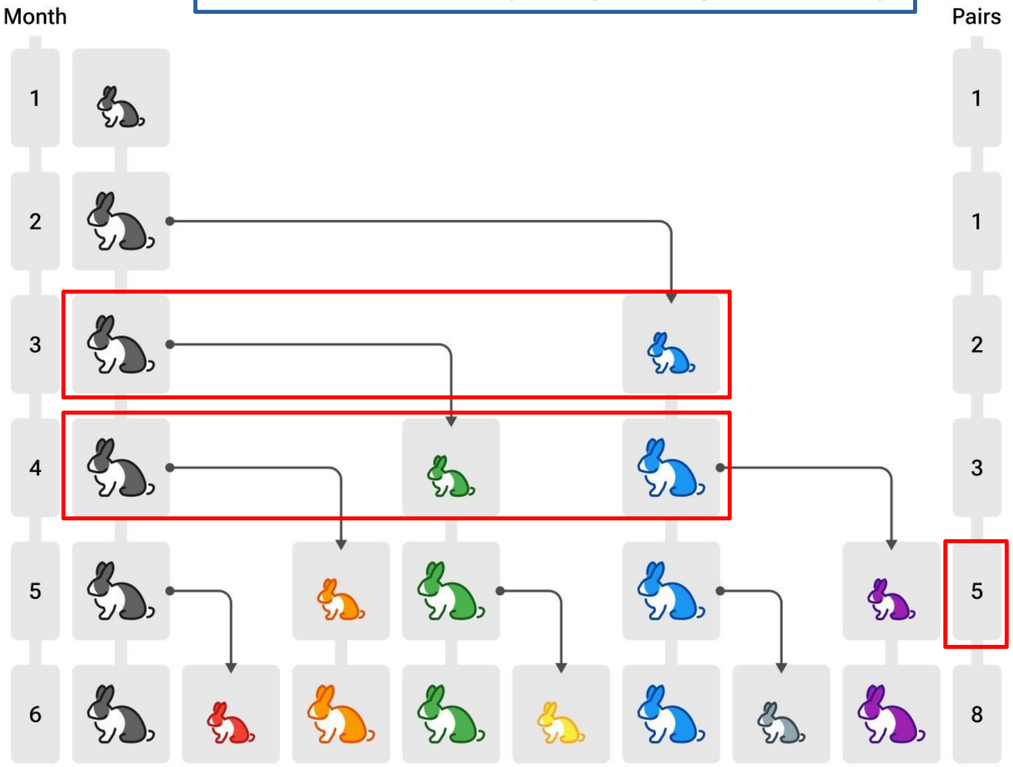
Julien Ramonet, mars 2025

Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées
Images : Wikipedia sauf mention contraire

Origine

5 = 3 couples **présents**
+ 2 couples **déjà là avant** (et donc assez âgés pour procréer)

- « **Problème de Fibonacci** » (1202) sur l'évolution d'une population de lapins.
  <u>On suppose que :</u>
  - Au début du premier mois, il n'y a qu'un (jeune) couple de lapereaux
  - Les lapins ne peuvent procréer qu'à partir de l'âge d'un mois
  - À partir de cet âge, ils engendrent tous les mois un autre couple de lapereaux
  - Les lapins ne meurent jamais



- Quelle est l'évolution de la population de lapins ?
  - Nb lapins (n) = nb lapins (n-1) « existants » + nb lapins (n-2) « adultes »

Définition

Un terme est la somme des 2 précédents

$$Pour\, n > 0\,, \boldsymbol{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n} \text{ avec } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1$$

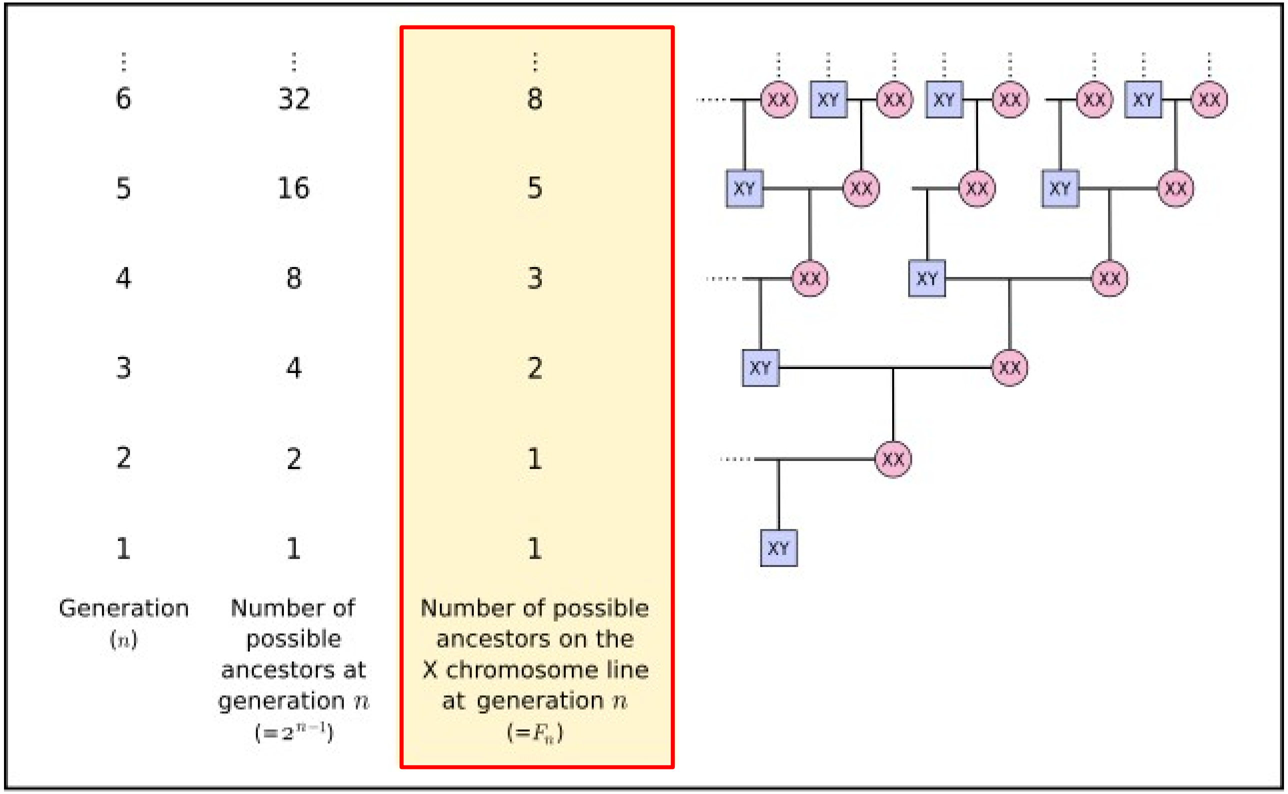
$$\text{Ou} : F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \text{ et, pour n} \geq 2, \; \boldsymbol{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$$

→ 20 premiers termes :

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181

Le chromosome X

- Le nombre de personnes ayant pu **transmettre le chromosome X à un homme** suit une loi de Fibonacci à mesure que l'on remonte les générations :
  - X reçu de la mère : 1
  - Mère : X reçu de son père (GP-M) ou sa mère (GM-M) = 2
  - GM-M : X reçu de son père (AGP-MM) ou sa mère (AGM-MM) : 2 ou GP-M : X reçu de sa mère (AGM-MP) = 3
  - ...



Le triangle de Pascal

Triangle de Pascal = facteurs du développement de $(a+b)^n$
= « formule du binôme de Newton »

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^0 &= 1\\
(1+x)^1 &= 1+1x\\
(1+x)^2 &= 1+2x+\ 1x^2\\
(1+x)^3 &= 1+3x+\ 3x^2+\ 1x^3\\
(1+x)^4 &= 1+4x+\ 6x^2+\ 4x^3+1x^4\\
(1+x)^5 &= 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+1x^5
\end{aligned}
$$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

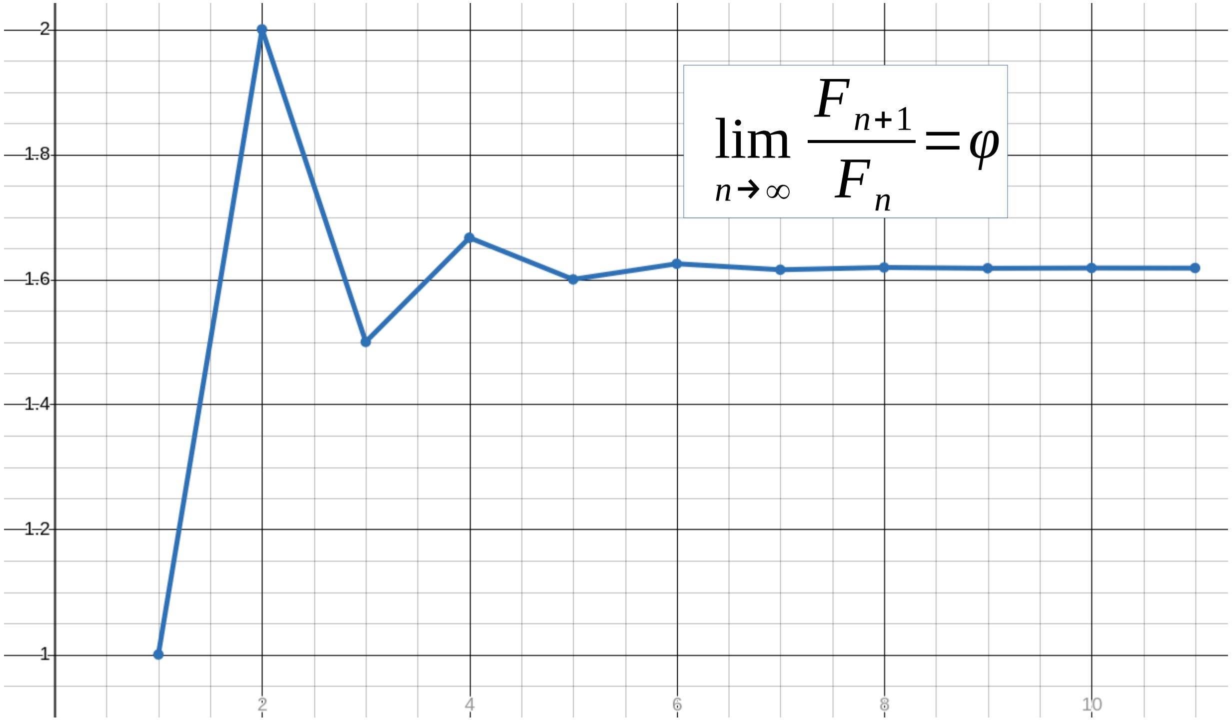
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Ratio des termes de la suite de Fibonacci

- Le ratio $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend très rapidement vers une valeur ≈ 1,618

n	F_{n+1}	F_n	F_{n+1}/F_n
0	1	0	-
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1,5
4	5	3	1,666
5	8	5	1,6
6	13	8	1,625
7	21	13	1,615
8	34	21	1,619
9	55	34	1,618
10	89	55	1,618



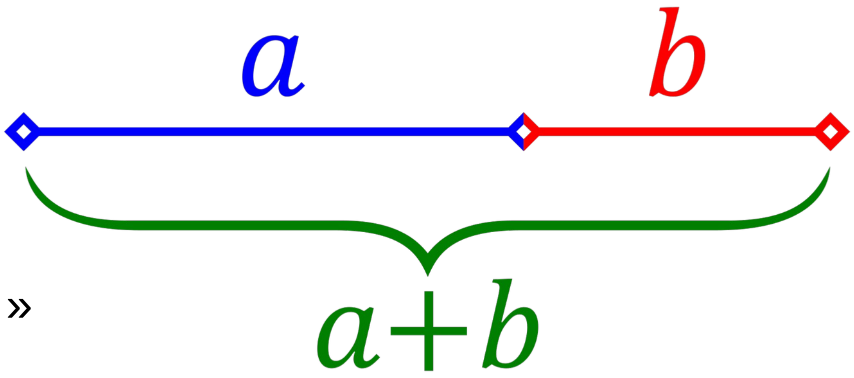
Courbe tracée avec Desmos :
https://www.desmos.com/calculator?lang=fr

Le nombre d’or

- Ou « **divine proportion** » = nombre **φ** tel que

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$$

« a+b est à a ce que a est à b »



- Donc φ est solution (« **racine** ») de l’équation

$$\varphi^2-\varphi-1=0$$

Euclide parle de partage en « **extrême et moyenne raisons** »

- Racines :

$$\boldsymbol{\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}\approx 1,618}$$

$$\varphi'=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{\varphi}\approx -0,618$$

Baptisé φ en l'honneur du sculpteur grec Phidias, concepteur du Parthénon à Athènes.

Propriétés du nombre d'or

- Rappel : racine positive de l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$
- Inverse : $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ (quand a/b=φ, b/a = φ–1)
- Racine continue :

$$\varphi^2 = 1 + \varphi \text{ donc } \varphi = \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

- Fraction continue :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}}} = 1, 2, \frac{3}{2}(1{,}5), \frac{5}{3}(1{,}666), \frac{8}{5}(1{,}6), \frac{13}{8}(1{,}625), \ldots$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k} = \varphi}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\varphi & = & 1 & \varphi & + & 0 \\
\varphi^2 & = & 1 & \varphi & + & 1 \\
\varphi^3 & = & 2 & \varphi & + & 1 \\
\varphi^4 & = & 3 & \varphi & + & 2 \\
\varphi^5 & = & 5 & \varphi & + & 3 \\
\varphi^6 & = & 8 & \varphi & + & 5 \\
\varphi^7 & = & 13 & \varphi & + & 8 \\
\varphi^8 & = & 21 & \varphi & + & 13 \\
 & & & \ldots & & \\
\varphi^n & = & F_n & \varphi & + & F_{n-1}
\end{array}$$

Lien avec π : $\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\varphi^{-2k-1} + \varphi^{-6k-3}\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\varphi-1)^{2k+1} + (2\varphi-3)^{2k+1}\right)$

Expression fonctionnelle de F_n

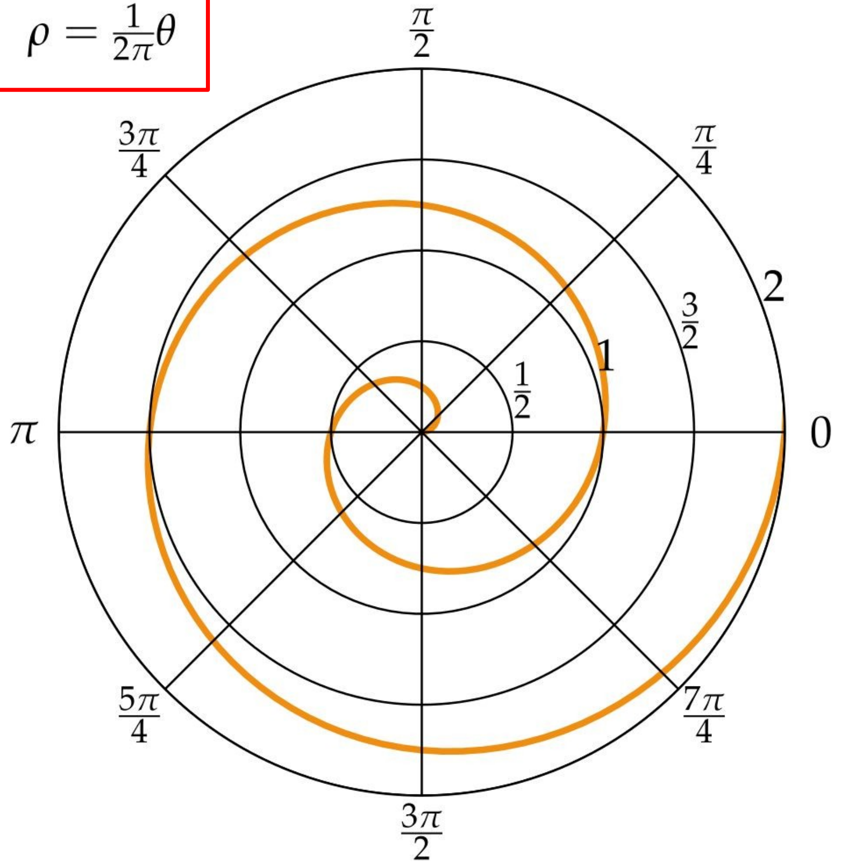
- La **forme fonctionnelle** d'une suite (u_n) permet de calculer un terme u_n **directement sans avoir à calculer tous les précédents** (avec la relation de récurrence)
- Ex (suite « **arithmétique** ») : $u_{n+1} = u_n + 2$ avec $u_0 = 1$
  - On peut calculer les termes successifs : 1, 3, 5, 7, 9, …
  - Ou on peut remarquer que $u_n = 1 + 2.n$ (= nombres impairs)
- Formule de Binet :

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \varphi'^n\right)}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \qquad \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} = 1-\varphi \approx -0,618$$

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

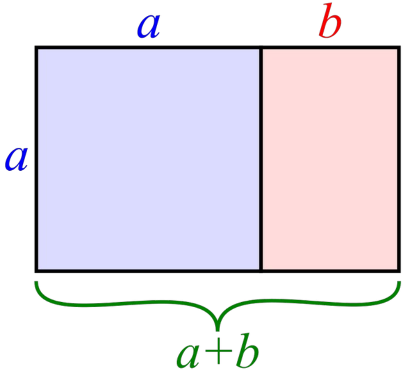
$$\boxed{\rho = \frac{1}{2\pi}\theta}$$



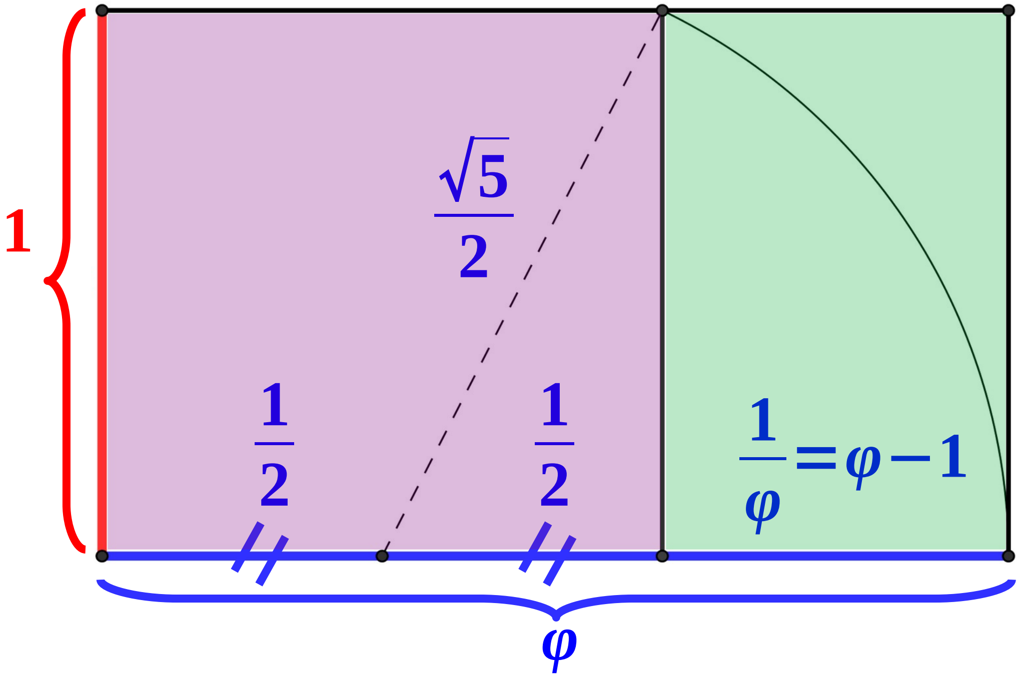
Spirale d'Archimède

Rappel : 1 tour = 360° = 2 π radians

Rectangle d'or



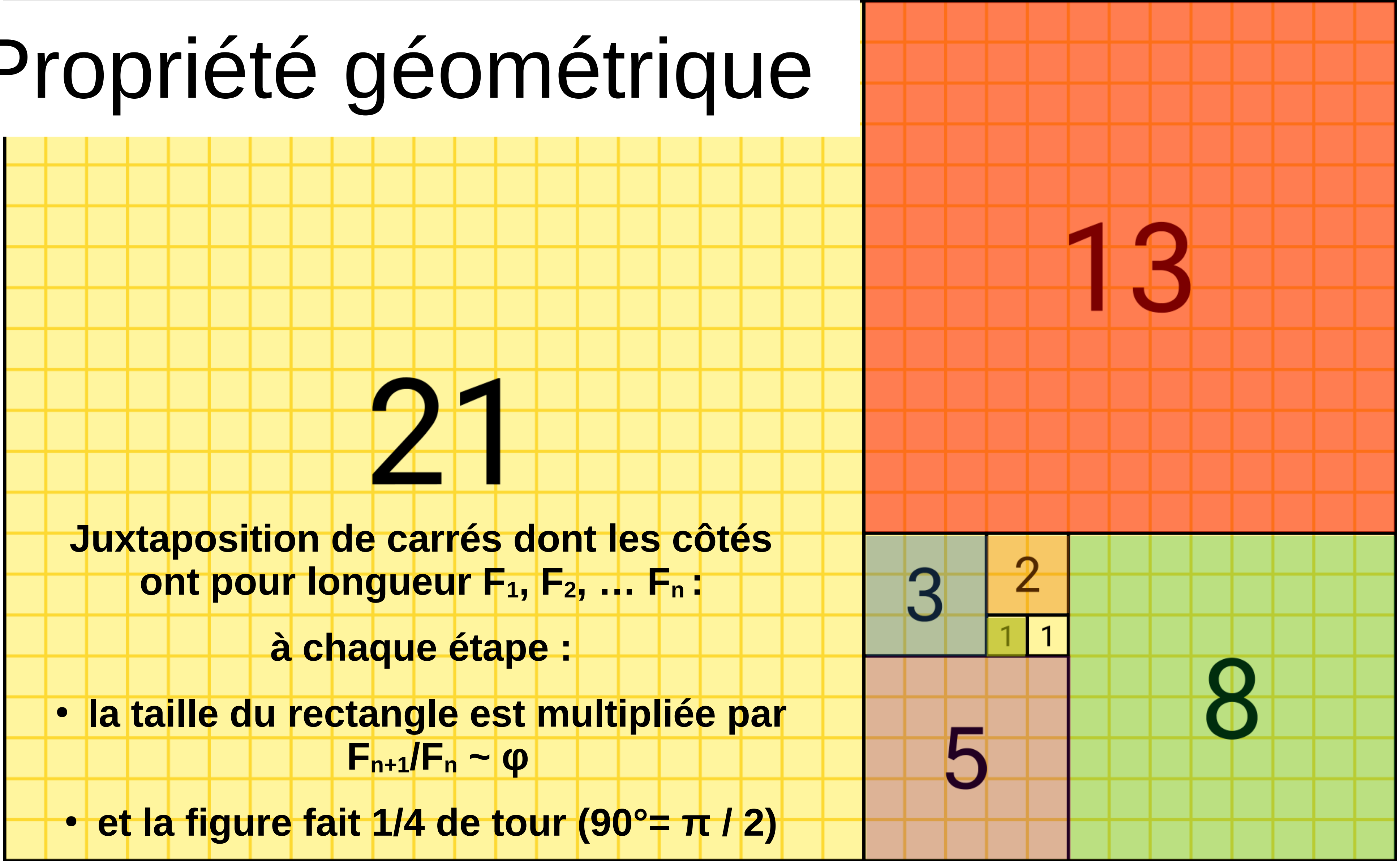
$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$$



Feuille A4, A3, … : ratio = √2 = 1,4142

- Si on **ajoute un carré** à un rectangle d'or, on obtient un **rectangle d'or φ fois plus grand**
- Si on **enlève un carré** à un rectangle d'or, on obtient un **rectangle d'or φ fois plus petit**

Propriété géométrique

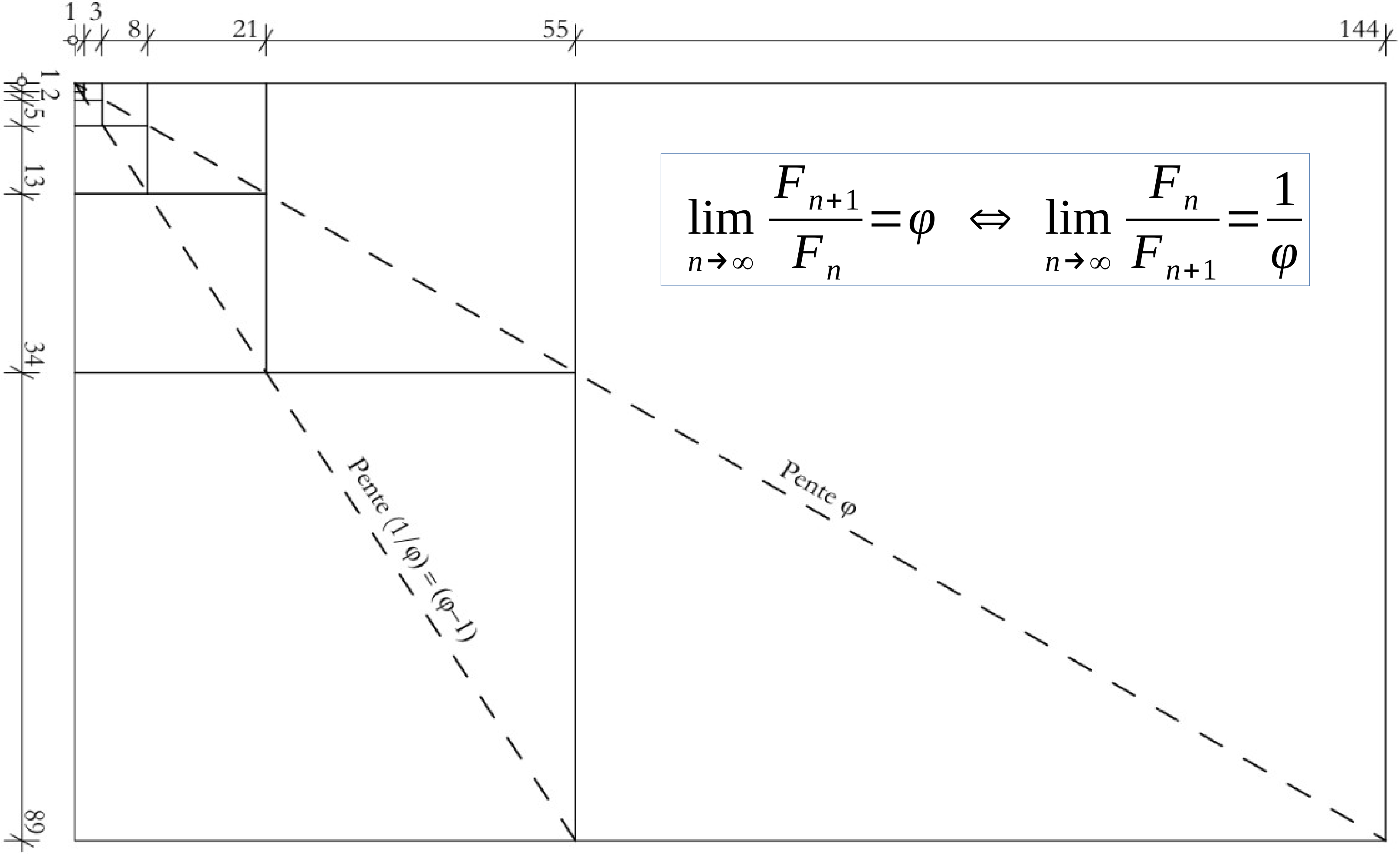


Juxtaposition de carrés dont les côtés ont pour longueur F_1, F_2, … F_n :

à chaque étape :

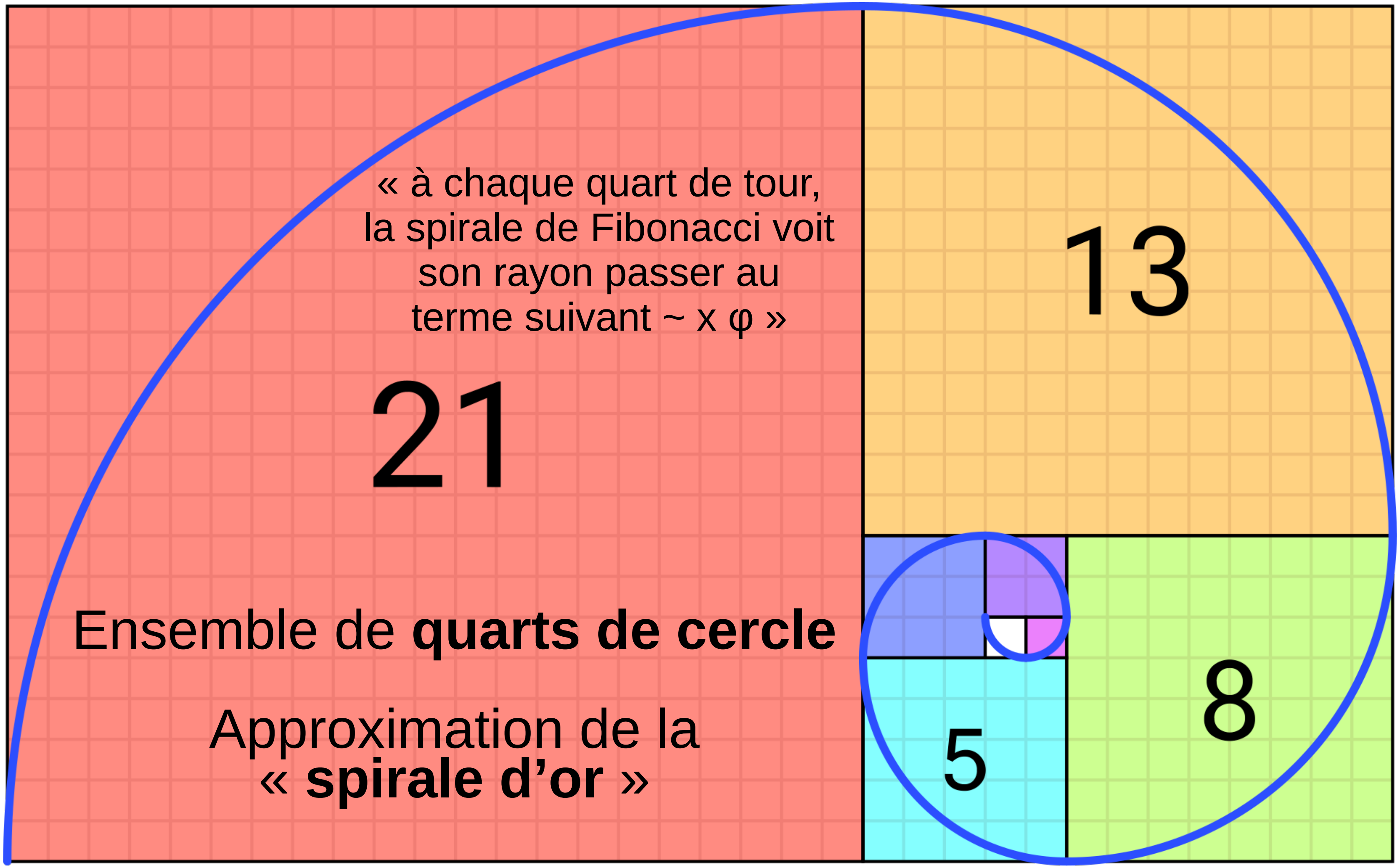
- **la taille du rectangle est multipliée par $F_{n+1}/F_n \sim \varphi$**
- **et la figure fait 1/4 de tour (90°= π / 2)**

Propriété géométrique



$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\varphi}$$

Spirale de Fibonacci



La spirale d'or

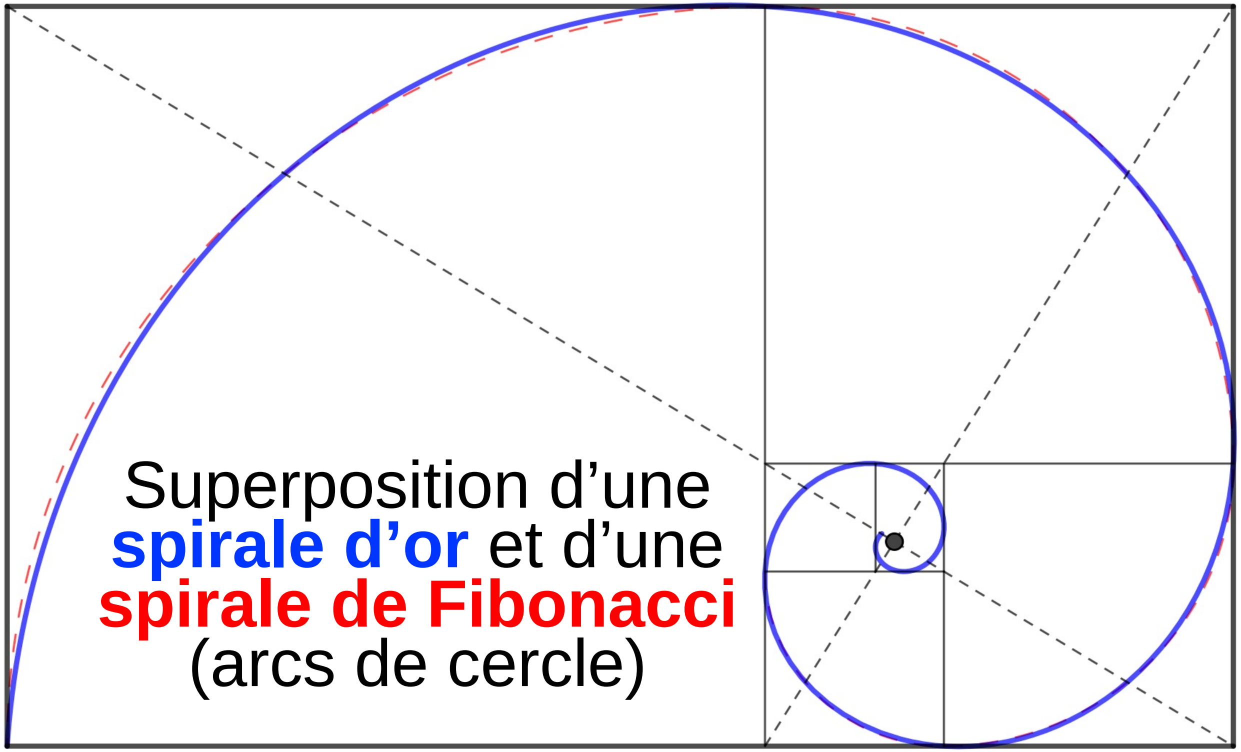
- C'est une **spirale logarithmique** de facteur de croissance φ : **à chaque quart de tour (π/2), son rayon est multiplié par φ**

$$r(\theta)=\varphi^{\frac{\theta}{\pi/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r(\theta+\pi/2)}{r(\theta)}=\varphi$$

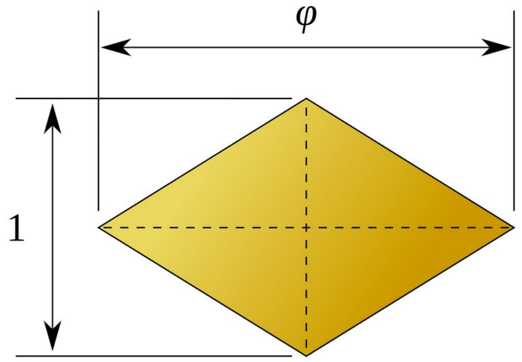
→ pour un tour, $\varphi.\varphi.\varphi.\varphi=\varphi^4$

$$\frac{r(\theta+2\pi)}{r(\theta)}=\varphi^4$$

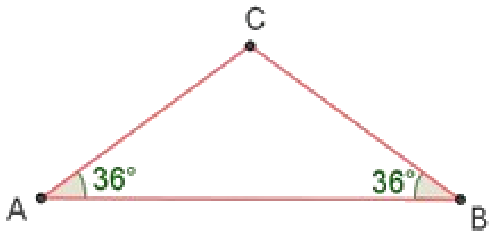


Losange et triangle(s) d’or

Losange d’or



Losange : 4 côtés de même longueur

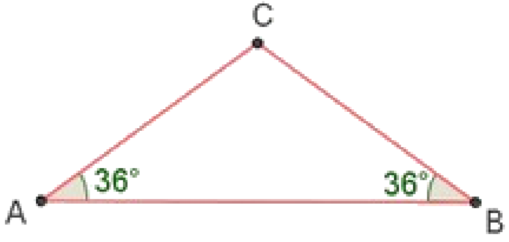


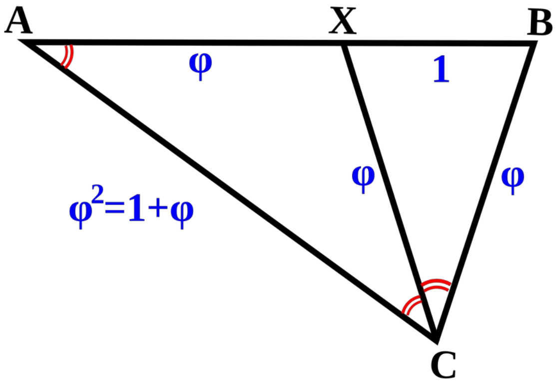
Triangle d’or : triangle **isocèle** dont le rapport des côtés vaut φ :
[1 ; φ ; φ] (aigu) : angles = 36°, 72°, 72°
[1 ; 1 ; φ] (obtus) : angles = 108°, 36°, 36°

Définitions de cet article	Définitions alternatives	$\frac{a}{b}$	Angle au sommet	Angles égaux de base
Triangle d'or Triangle sublime	Triangle d'or aigu	φ	36°	72°
Gnomon d'or Triangle d'argent	Triangle d'or obtus « divin »	$\frac{1}{\varphi}$	108°	36°

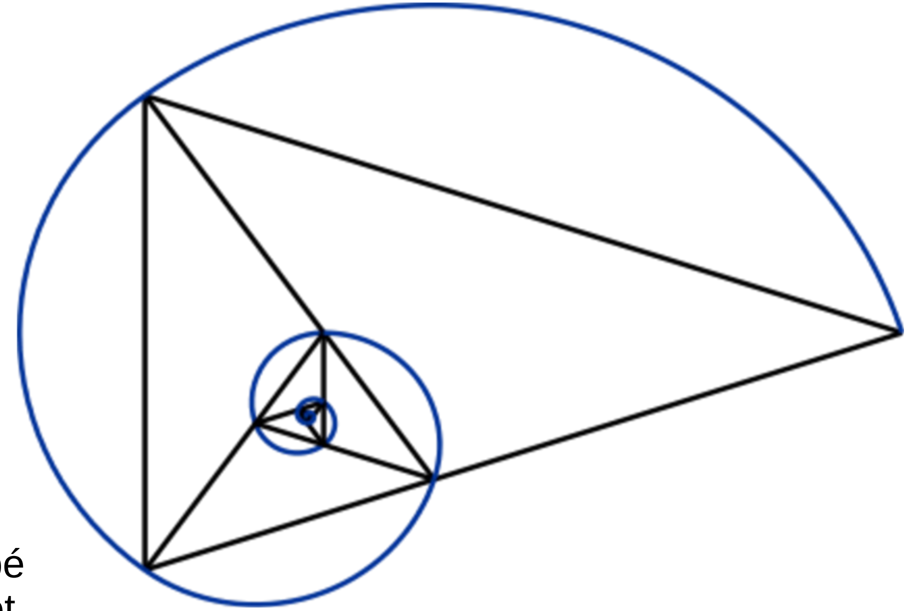
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-d-or

Triangle d’or : division et spirale d’or





Triangle d'or ABC découpé en un triangle d'or BXC et un gnomon d'or AXC



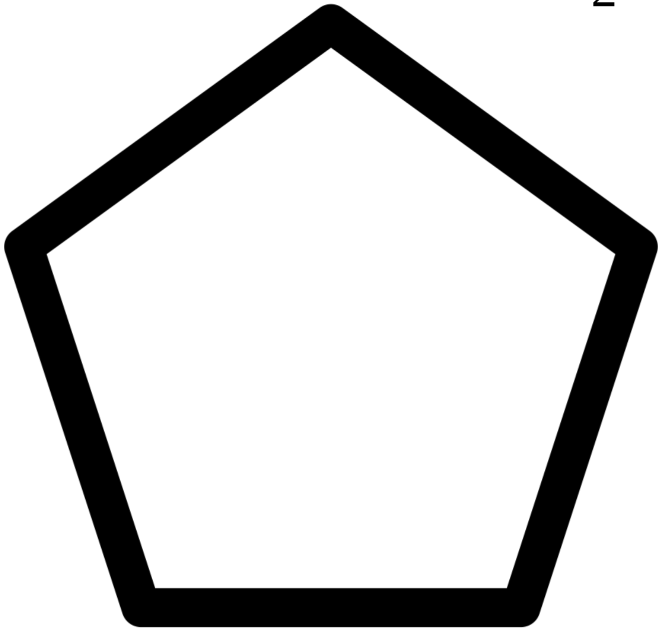
https://www.pngegg.com/fr/png-endsr
https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_d%27or_(g%C3%A9om%C3%A9trie)#
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/le-nombre-d-or

Pentagone

φ est au pentagone ce que π est au cercle

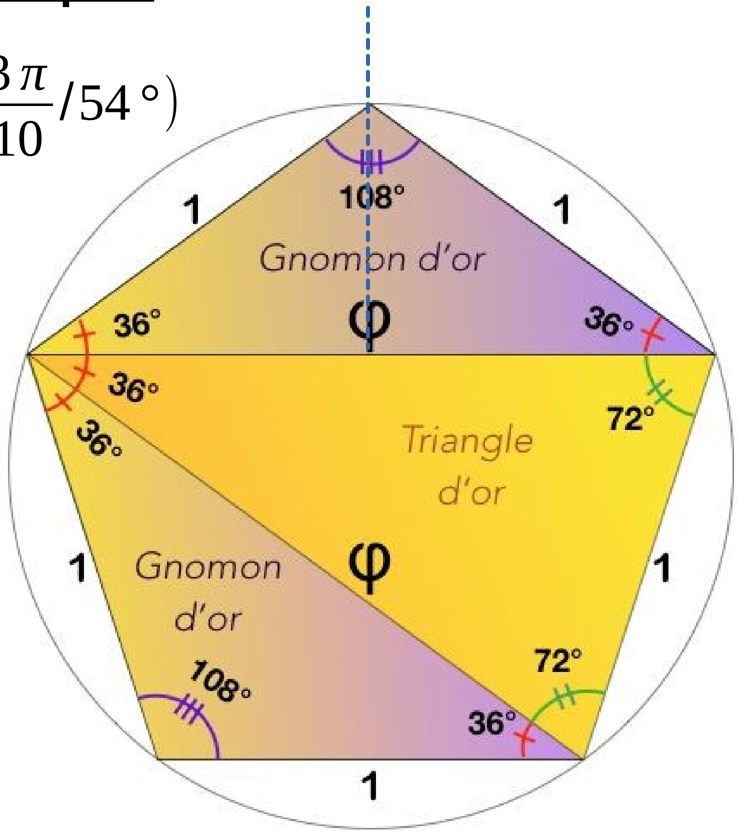
Propriété trigonométrique

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2\cos\left(\frac{\pi}{5}/36°\right)=2\sin\left(\frac{3\pi}{10}/54°\right)$$



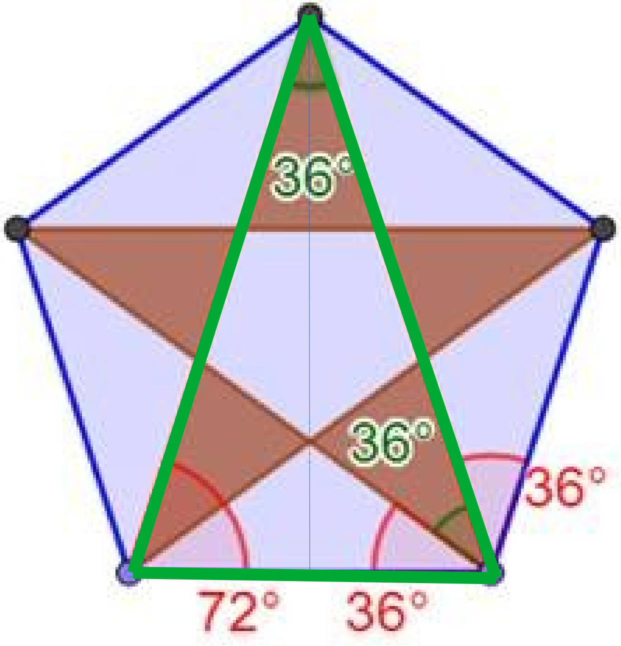
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}/36°\right)=\frac{\varphi}{2}$$

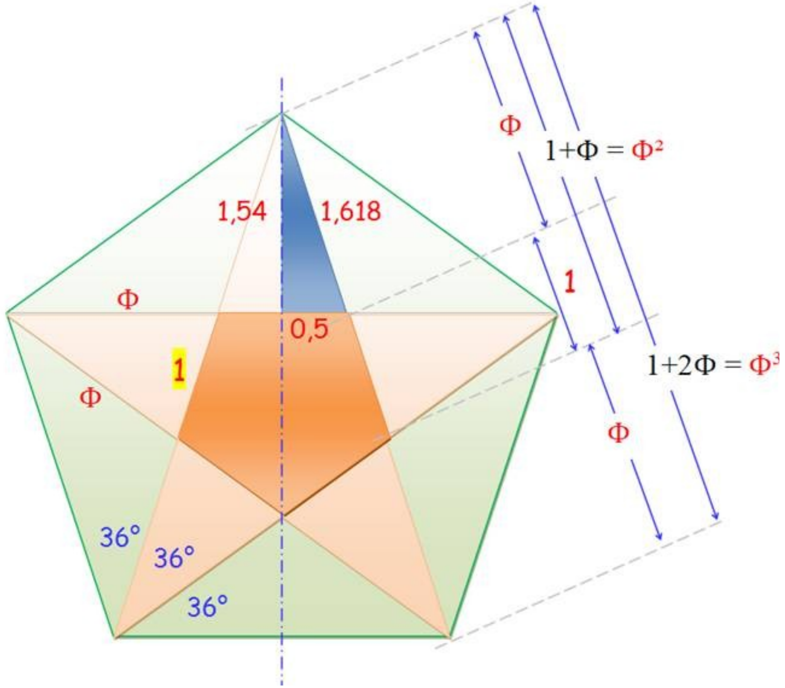
$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}/54°\right)=\frac{\varphi}{2}$$

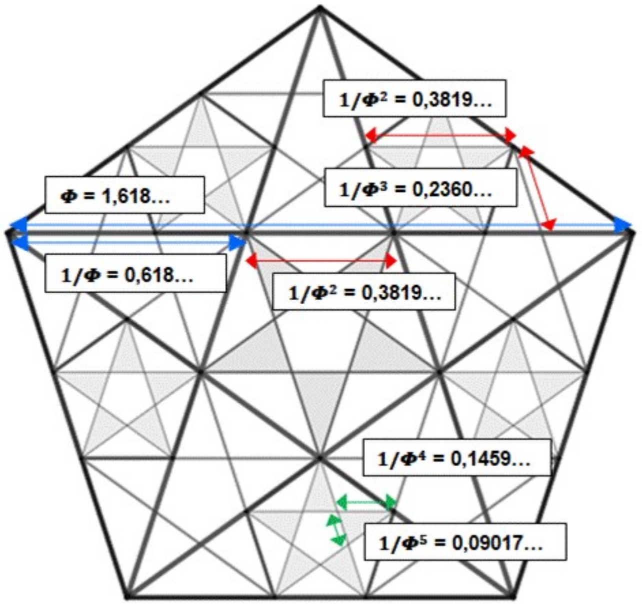


Nombre d'or et **pentagramme**

φ est également fondamental pour le **pentagramme** : tous les sommets d'un pentagramme régulier sont des triangles d'or



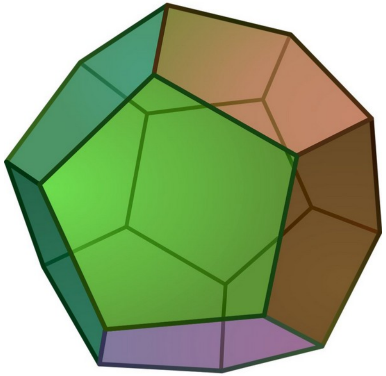
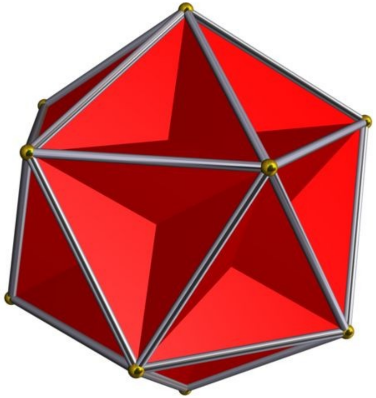
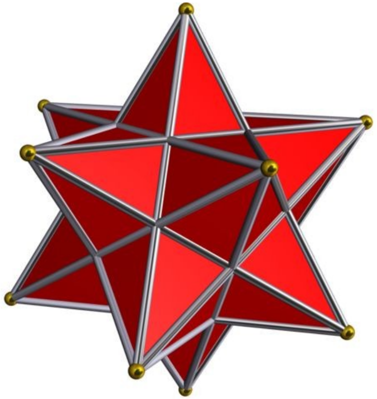
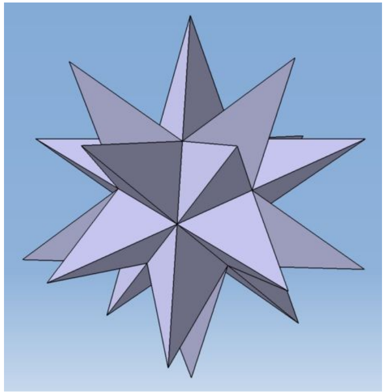
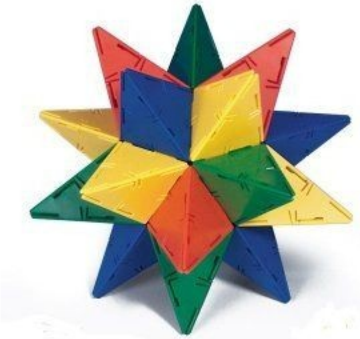




http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Polygone/PentaAng.htm
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/NbOrPent.htm
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/NbOrEtoi.htm

Nombre d’or et **dodécaèdre**

- **Dodécaèdre** = polyèdre à 12 faces
  - **Dodécaèdre régulier**
  - **Grand dodécaèdre** : les faces sont des pentagones réguliers, chaque face en coupe 5 selon un pentagone régulier
  - **Petit dodécaèdre étoilé** : 12 faces pentagrammiques (60 triangles d’or) connectées par les sommets
  - **Grand dodécaèdre étoilé** : 12 faces pentagrammiques (60 triangles d’or), trois pentagrammes connectés à chaque sommet
- Les coordonnées des sommets font appel à φ

φ intervient aussi dans la position des sommets de l’icosaèdre (20 côtés) et du grand icosaèdre

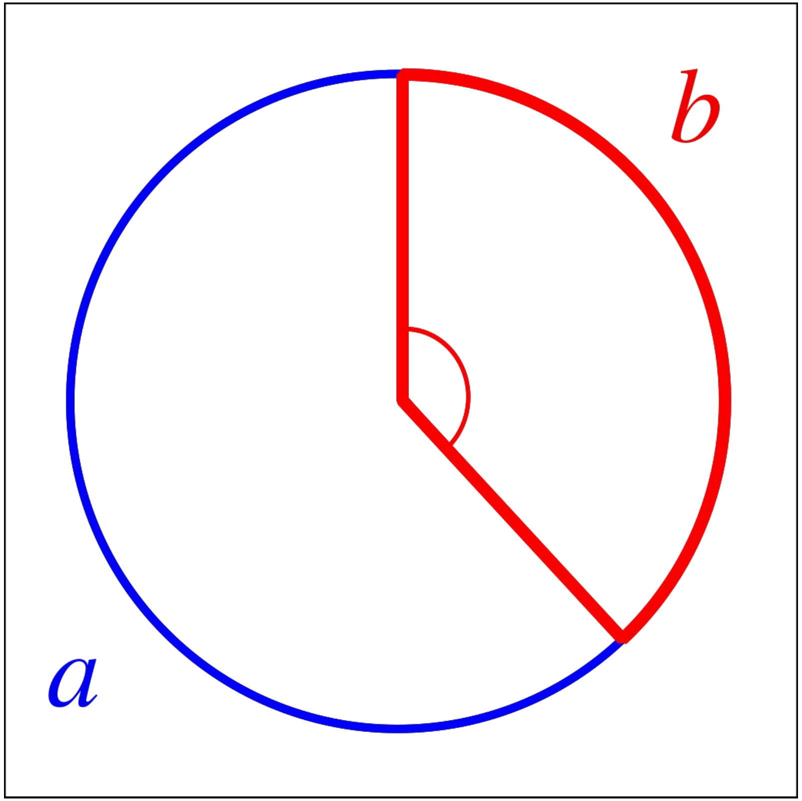
https://mathcurve.com/polyedres/granddodecaedreetoile/granddodecaedreetoile.shtml

L'angle d'or

- C'est le plus petit des deux angles complémentaires (somme = 2π = 360°) dont le rapport vaut Φ → b

$$\begin{cases} a + b = 2\pi \\ a \,/\, b = \varphi \end{cases}$$

- Il vaut ≈ 2,4 rad ≈ 137,5 °



Les nombres de Lucas

même limite : $\lim_{n \to \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \varphi$

$$Pour\, n>0\,, \boldsymbol{L_{n+2} = L_{n+1} + L_n} \text{ avec } L_0 = 2 \text{ et } L_1 = 1$$

Un terme est la somme des 2 précédents
(mais avec des termes initiaux différents)

→ 20 premiers termes :

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181
L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}	L_{17}	L_{18}	L_{19}
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207	3571	5778	9349

https://en.wikipedia.org/wiki/Lucas_number