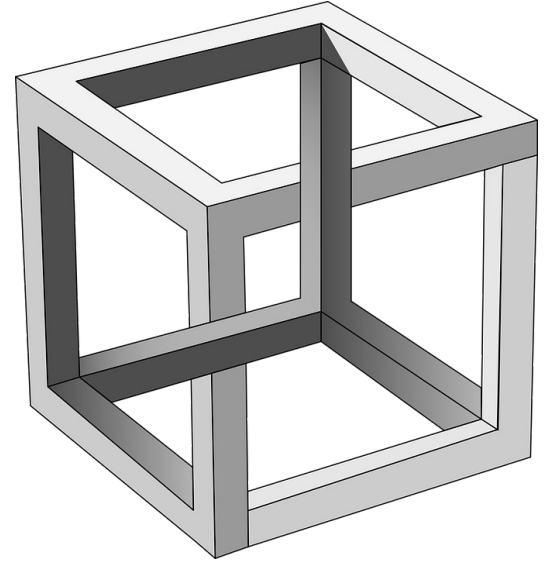


Paradoxes (3)

Physique



Triangle de Penrose et cube impossible d'Escher

Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées
Images : Wikipedia sauf mention contraire

Définition

- Définition (Robert)
 1. Opinion qui va à l'encontre de l'opinion communément admise.
 2. Association de deux faits, de deux idées contradictoires.
- D'après le grec ancien παράδοξος / parádoxos, « contraire à l'opinion commune »

Utilité des paradoxes

- Deux grands rôles :
 - mettre à mal une théorie ou un concept (dialectique)
 - Révéler une contradiction
- Ont eu une place importante dans l'évolution des mathématiques
 - Lorsque l'on réalise qu'une théorie aboutit à un paradoxe, il faut la corriger
 - Effets inhibants ou stimulants
- Reposent sur le **principe de non-contradiction** : « Une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps » : on ne peut affirmer à la fois p et \bar{p} (non- p)

Paradoxe des jumeaux



- Paul Langevin, 1911
- Deux jumeaux : l'un fait un voyage aller-retour à une vitesse proche de c
- Chacun voit son **temps propre** s'écouler « **normalement** » (aucune **expérience locale** ne permet de déterminer qu'on est en mouvement)
- Dilatation des durées **réciproque** : une horloge **en mouvement par rapport à nous** nous voit elle-même **en mouvement par rapport à elle** et donc **notre temps lui semble ralenti...**
- → les 2 pensent avoir moins vieilli que l'autre car ils se sont déplacés p.r. à l'autre
- **Mais le jumeau qui a voyagé a moins vieilli que son frère resté sur Terre**
- Levée du paradoxe : en réalité, seul l'un d'eux a **changé de référentiel (accéléré)**

Attention : on ne peut pas voyager dans son temps propre !

Paradoxe de l'information (1)

Hawking, 1976 : l'information portée par une fonction d'onde franchissant l'horizon d'un trou noir qui s'évapore par la suite est perdue

- **Mécanique quantique :**

- l'information **ne peut être perdue**
= principe d'**évolution unitaire**
(équation de Schrödinger)
- L'information doit être préservée, quelles que soient les transformations subies par le système

- **Relativité générale :**

- Horizon du trou noir = point de non-retour : ce qui entre dans un trou noir ne peut en sortir – pas un problème pour la MQ

- Mais, en 1975, Hawking met en évidence **l'évaporation** des trous noirs, qui peuvent totalement disparaître, **emportant avec eux l'information !**



Paradoxe de l'information (2)

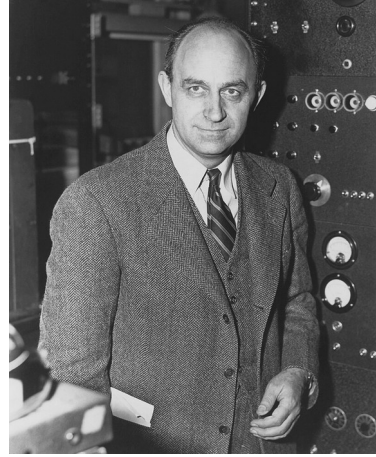
- **Problème fondamental !**

- Carrefour de la **relativité générale** et de la **mécanique quantique**, qui nécessite une théorie englobant les deux (ex : **théorie des cordes**)
- Incompatibilité du **principe de conservation de l'information**, du **principe d'équivalence** et du **théorème d'impossibilité du clonage quantique**
- **Principe holographique** :
 - Leonard Susskind : « La quantité maximale d'informations contenues dans un **volume** d'espace ne peut être plus importante que celle qui est emmagasinée à la **surface** de ce volume, où une quantité élémentaire ou « bit » d'informations occupe un quart de la surface dite de Planck. »
 - L'information absorbée est codée à la surface et ne serait pas perdue lors de l'évaporation du trou noir

- Lié à l'**entropie** (des trous noirs)

Paradoxe de Fermi (1950)

« Where is everybody ? »



- Pourquoi n'avons-nous jamais été en contact avec des extraterrestres ?
- Quatre groupes d'hypothèses (Michael Hart) :
 - Probabilité d'apparition d'une civilisation technologiquement avancée très faible
 - Communication / voyage interstellaires impossibles ou non souhaitables
 - La vie existe ailleurs, mais elle est difficile à détecter
 - Nous recevons des visites indétectables

(Fermi pas le premier)

Est-ce vraiment un paradoxe ?

- Robert A. Freitas : « Invalidité formelle du paradoxe de Fermi, qui ne peut pas être exprimé dans une forme **sylogistique** paraissant **acceptable** »
 - On note : A = existence des extraterrestres, B = présence aux alentours de la Terre, C = ils sont visibles
 - Formulation : « Si A, alors probablement B ; si B, alors probablement C ; or C n'est pas, donc B et A ne sont pas non plus » → invalide car « **probablement** » **non mesurable par le calcul**

Équation de Drake

Nombre de civilisations extraterrestres dans notre galaxie avec lesquelles nous pourrions entrer en contact :

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L$$

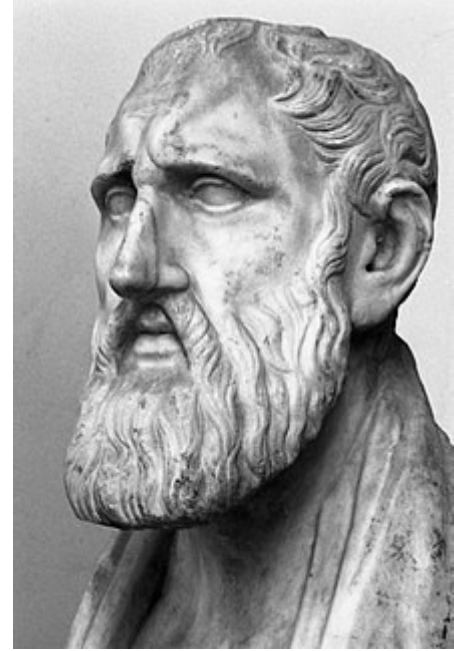
- R^* : **nombre d'étoiles en formation** par an dans notre galaxie : 10
- f_p : fraction de ces étoiles **entourées de planètes** : 0,5
- n_e : nombre moyen de **planètes propices à la vie** par étoile : 2
- f_l : fraction de ces planètes sur lesquelles **la vie apparaît effectivement** : 1
- f_i : fraction de ces planètes sur lesquelles apparaît **une vie intelligente** : 0,01
- f_c : fraction de ces civilisations **capables et désireuses de communiquer** : 0,01
- L : durée de vie moyenne d'une civilisation : 10 000 ans

N = 10

Valeurs très discutées

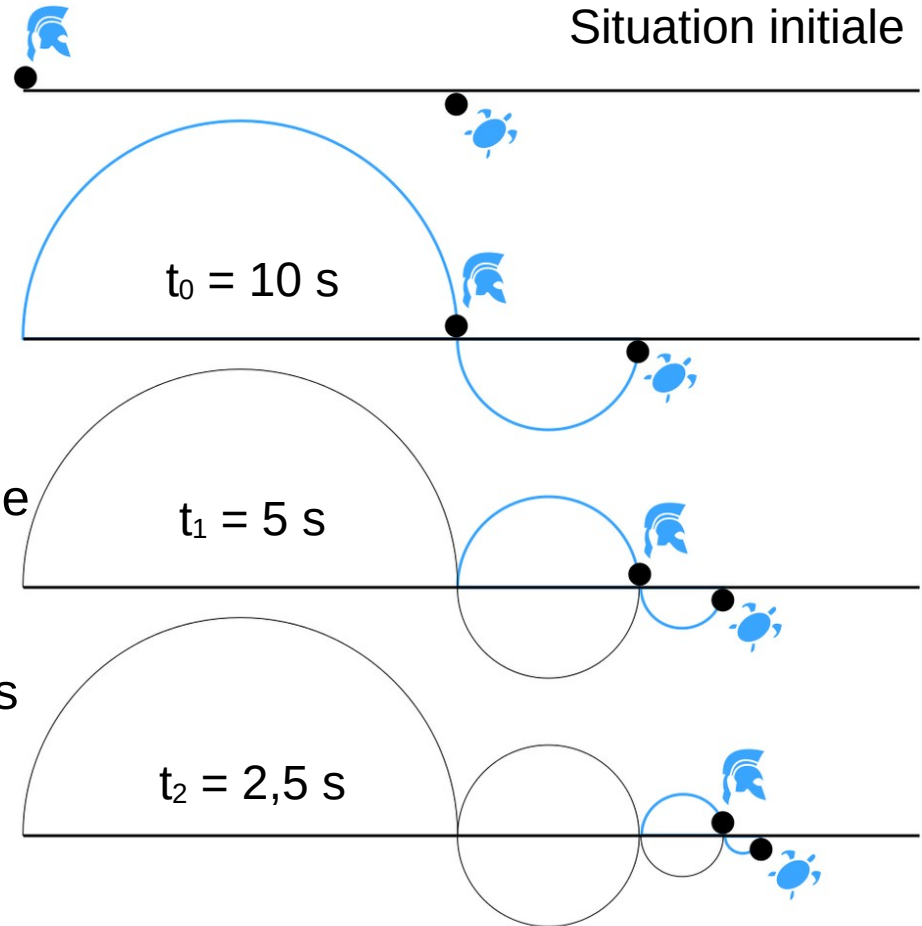
Les paradoxes de Zénon

- Zénon d'Élée (c 490-430 av JC), élève de Parménide
 - Aristote : « Zénon est l'inventeur de la dialectique »
- Partisan de **l'unité et la continuité**, par opposition à **la pluralité et la discontinuité**
 - Notions d'**infini** et d'**illimité**
- But : prouver que **la pluralité n'existe pas** en pointant les paradoxes qu'elle entraîne
- Exemple : paradoxe de la pluralité numérique :
 - Si la pluralité existe, elle doit être finie (il y a un certain nombre de choses) et également infinie (deux choses sont séparées par une troisième, etc.)
- Exemple : pluralité de lieux :
 - Si tout ce qui est se situe dans un lieu, ce lieu est lui-même dans un autre lieu, etc...

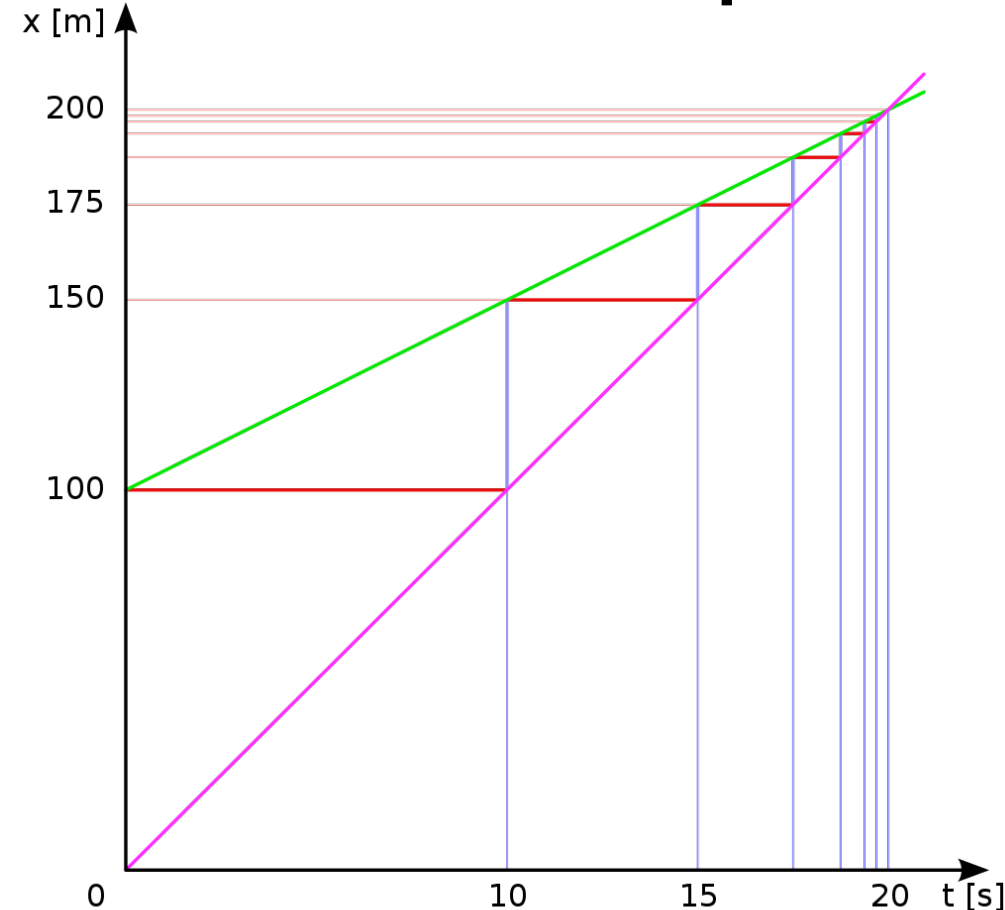


Le paradoxe d'Achille

- Situation :
 - La tortue court à 5 m.s^{-1}
 - Achille laisse 100 m d'avance à la tortue
 - Achille court à 10 m.s^{-1}
 - **Quand Achille rattrape-t-il la tortue ?**
- Quand Achille atteint la position initiale de la tortue, il a parcouru 100 m (en 10 s)
 - Mais la tortue a avancé de 50 m !
- Quand Achille atteint cette nouvelle position de la tortue, il a parcouru 50 m de plus (en 5 s)
 - Mais la tortue a avancé de 25 m !
- Etc... : se succèdent des étapes à chaque fois 2 fois plus courtes
- **Donc Achille ne rattrape jamais la tortue !**



Résolution mathématique



- **Par les temps :**

$$\begin{cases} T = t_0 + t_1 + t_2 + \dots \\ T = 10 + 5 + 2,5 + \dots \\ T = \frac{10}{1} + \frac{10}{2} + \frac{10}{4} + \dots \end{cases} \quad t_n = \frac{10}{2^n}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{2^n} = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 20 \text{ s}$$

- **Par les positions :** à quel temps Achille et la tortue seront-ils au même point ?

$$D = v \cdot T = 10T = 100 + 5T \Rightarrow T = 20 \text{ s}$$

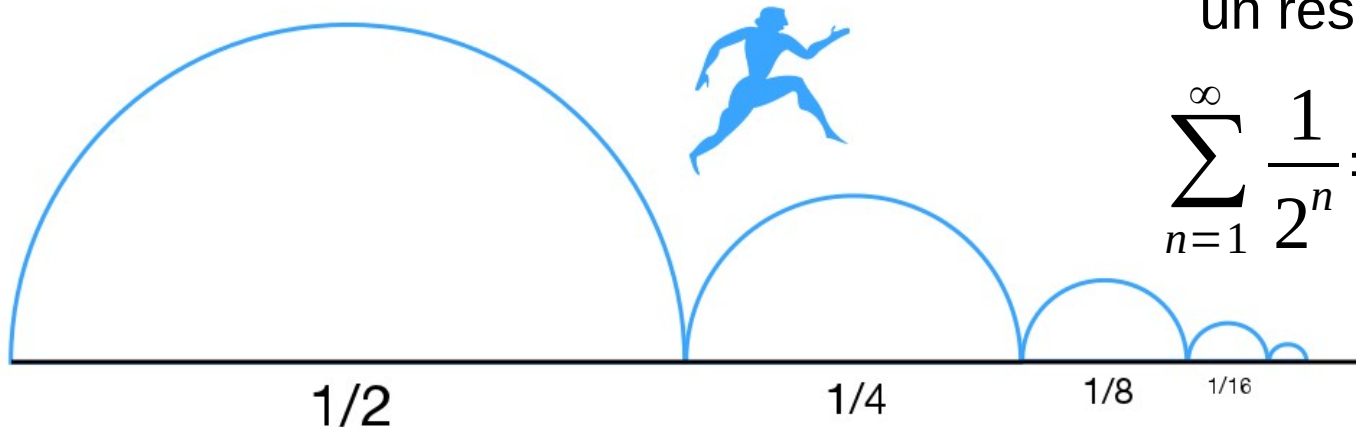
- **Par les vitesses :** Achille va à $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ de plus que la tortue, il rattrape donc 5 m de retard par seconde, il lui faut donc 20 s pour rattraper les 100 m (équivalent à se placer dans le référentiel de la tortue)
- D'où l'importance :

- De bien poser le problème
- D'avoir les bons outils

Autre « paradoxe » de Zénon

« Paradoxe de la dichotomie »

- On doit toujours traverser la demi-distance nous séparant de la destination
- Mais il existe un nombre infini de demi-distances (de 0 à 1/2 puis de 1/2 à 3/4, de 3/4 à 7/8, ...)
- Mouvement impossible car il est **impossible de parcourir complètement une infinité de choses**
- Mais mouvement **continu** ; le fait qu'il soit divisible à l'infini ne rend pas le trajet impossible
- De plus, une somme infinie de nombres strictement positifs peut converger vers un résultat fini :



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

Paradoxe de la flèche



- À chaque instant, une flèche en vol se trouve à une **position précise**
- **Si présent de durée nulle**, la flèche n'a pas le temps de se déplacer et est donc immobile
- **Si temps = succession de moments de durée nulle, comment le mouvement est-il possible ?**
- Le mouvement est pourtant réel !
- Interroge sur la nature du temps...

- Pour calculer une vitesse, nécessité d'un intervalle de temps **non nul**
- Résolution mathématique par la **notion de limite** (XIX^e s)
→ **calcul infinitésimal**
(= problème bien posé)

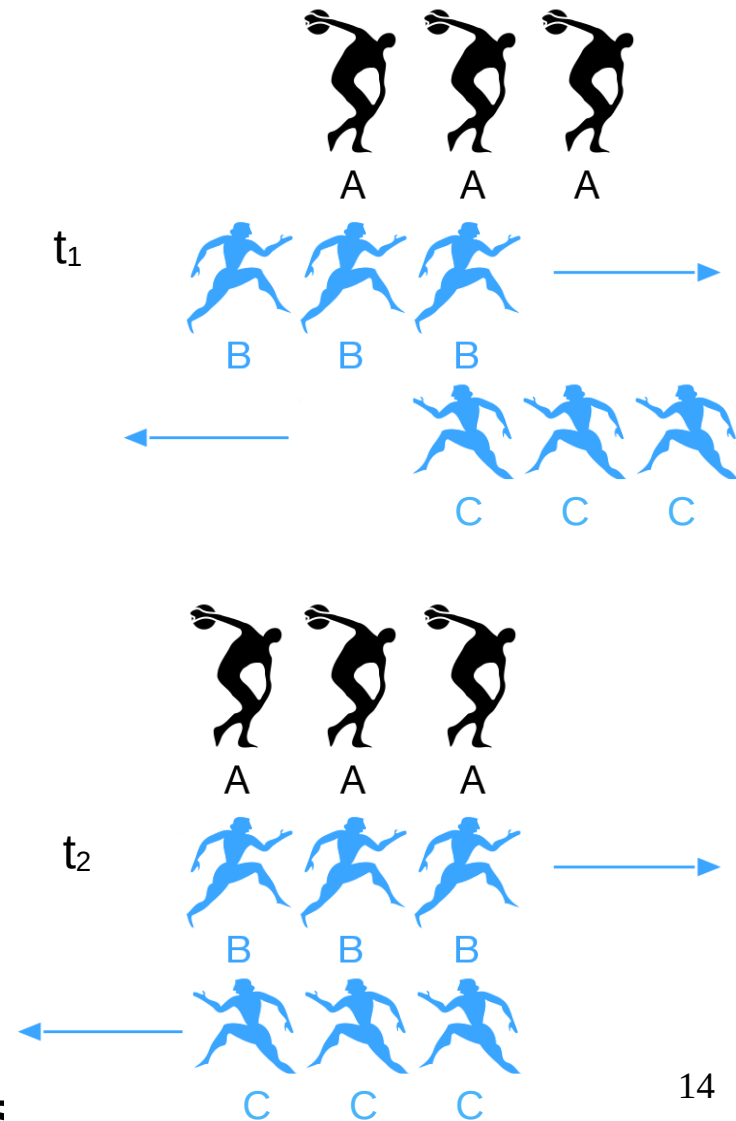
Déplacement pendant le temps τ

Position à instant $t + \tau$ Position à instant t

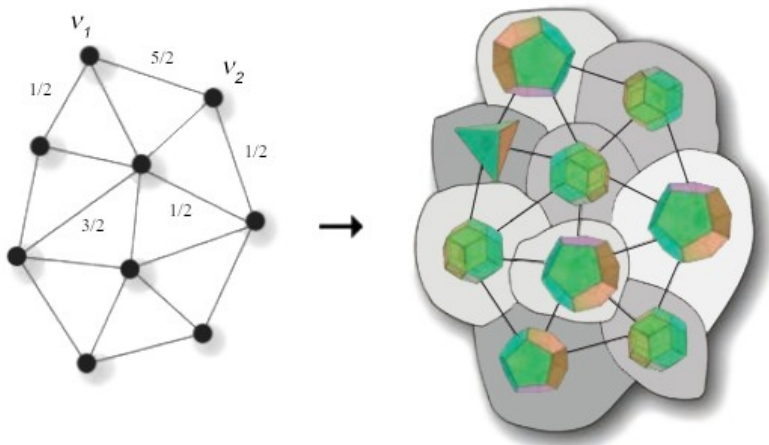
$$v = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} = \frac{dx}{dt}$$

Paradoxe du stade

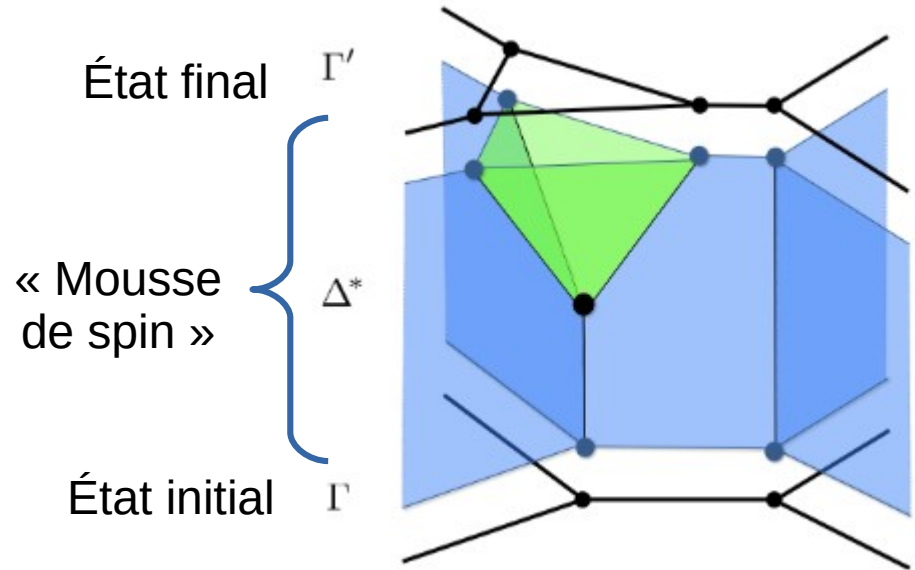
- 3 rangées :
 - A : immobiles
 - B : v vers la droite
 - C : v vers la gauche
- Entre t_1 et t_2 , B voit passer un athlète A et 2 athlètes C
- Cependant, les rangées B et C atteignent la rangée A en même temps
- Conclusion : **une distance / durée est double et moitié d'elle-même**
- Paradoxe si temps discontinu
- Pas de paradoxe si on considère un **temps continu** et des **vitesse continues** et **relatives**



- Espace(-temps) continu ou discontinu ?
- Mécanique quantique « ou » relativité générale ?
- **Gravité quantique à boucles ?**
 - On ne parle que de **positions** de quantités observables

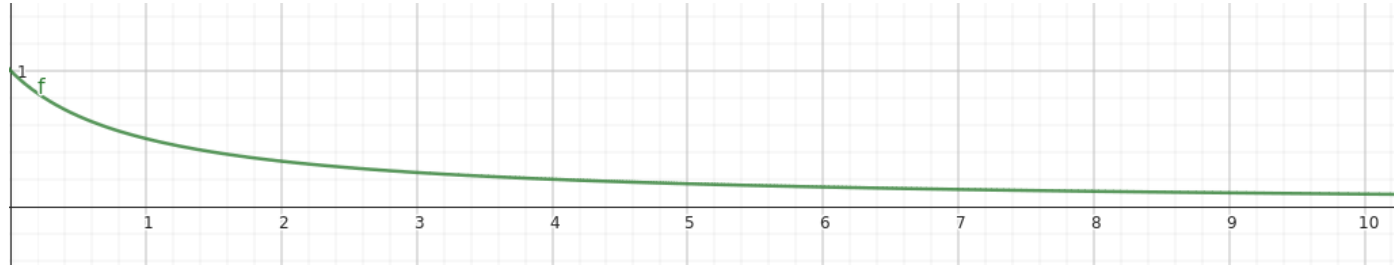


Question actuelle !



- Les quanta d'espace n'évoluent pas dans le temps : le temps naît de la succession des états des quanta du champ gravitationnel à l'échelle de temps de Planck $\sim 10^{-43}$ s = « mousse de spin »
- L'espace-temps n'est pas défini entre 2 états...

Infini



- **Un infini peut-il être plus grand qu'un autre ?**

- Exemple : entiers positifs (naturels) et carrés
 - 1, 2, 3, 4, ... n
 - 1, 4, 9, 16, ... n²
 - Pourtant, il y a correspondance 1 à 1 entre les éléments des 2 listes : à chaque élément d'une liste, on peut associer **un et un seul élément** de l'autre (= « **bijection** »)
 - 1-1, 2-4, 3-9, ...
 - Il y a autant de carrés de nombres entiers que de nombres entiers, même si l'ensemble des carrés est inclus dans l'ensemble des entiers naturels
- Le tout est-il plus grand que la partie ??

Chuck Norris a déjà compté jusqu'à l'infini. Deux fois.

- On peut même définir une bijection entre les intervalles $]0;1[$ et $]0;+\infty[$
- Et même entre le côté d'un carré et le carré lui-même ($1D \leftrightarrow 2D$)
- Et, encore plus généralement, entre une droite et un espace de dimension n !
 - Parallèle avec le **principe holographique**
- → Distinction entre « être contenu dans » et « être plus petit que »

Ces interrogations ont eu un effet inhibant pendant près de 2000 ans sur la conceptualisation de l'infini