Paradoxes (2)

- Logiques
- Mathématiques

« Je sais que je ne sais rien »

Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées
Images : Wikipedia sauf mention contraire

https://twitter.com/Ready2Nerd/status/666308581000654848/photo/1

Définition

- Définition (Robert)
  1. Opinion qui va à l'encontre de l'opinion communément admise.
  2. Association de deux faits, de deux idées contradictoires.
- D’après le grec ancien παράδοξος / parádoxos, « contraire à l'opinion commune »

Utilité des paradoxes

- Deux grands rôles :
  - mettre à mal une théorie ou un concept (dialectique)
  - Révéler une contradiction
- Ont eu une place importante dans l’évolution des mathématiques
  - Lorsque l’on réalise qu’une théorie aboutit à un paradoxe, il faut la corriger
  - Effets inhibants ou stimulants
- Reposent sur le **principe de non-contradiction** : « Une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps » : on ne peut affirmer à la fois p et $\overline{p}$ (non-p)

Paradoxes mathématiques

Chuck Norris a déjà compté jusqu’à l’infini.
Deux fois.

(The Chuck Norris facts)

Le paradoxe de Simpson (1951)

- Étude de santé sur les calculs rénaux (2 groupes de 350 personnes) :

	Traitement 1		Traitement 2	
Total	78 %	273/**350**	83 %	289/**350**

  - Quelle méthode choisissez-vous ?
- Mais, si on regarde plus en détails …

	Traitement 1		Traitement 2	
Petits calculs	93 %	81/87	87 %	234/270
Gros calculs	73 %	192/263	69 %	55/80
Total	78 %	273/**350**	83 %	289/**350**

Moyenne pondérée

$$78\,\% = \frac{93\,\% \times 87 + 73\,\% \times 263}{350}$$

$$83\,\% = \frac{87\,\% \times 270 + 69\,\% \times 80}{350}$$

- **Deux éléments sont nécessaires** pour que le paradoxe se produise :
  - **Facteur « de confusion » caché** (ici : taille des calculs)
  - **Population des groupes** différente

Le paradoxe de Simpson (2)

- Ici, **les 2 traitements sont moins efficaces sur les gros calculs**
- Le traitement 1 (**pourtant plus efficace**) est **plus testé sur les gros calculs**, ce qui fait **baisser son efficacité globale → les chiffres consolidés sont trompeurs !**
- Ici, comme 87 % > 73 % (le traitement 2 fonctionne mieux sur les petits calculs que le traitement 1, sur les gros), on peut inverser le résultat consolidé en **modifiant la population des sous-groupes**

	Traitement 1		Traitement 2	
Petits calculs	93 %	81/87	87 %	234/270
Gros calculs	73 %	192/263	69 %	55/80
Total	78 %	273/**350**	83 %	289/**350**

Cas extrême

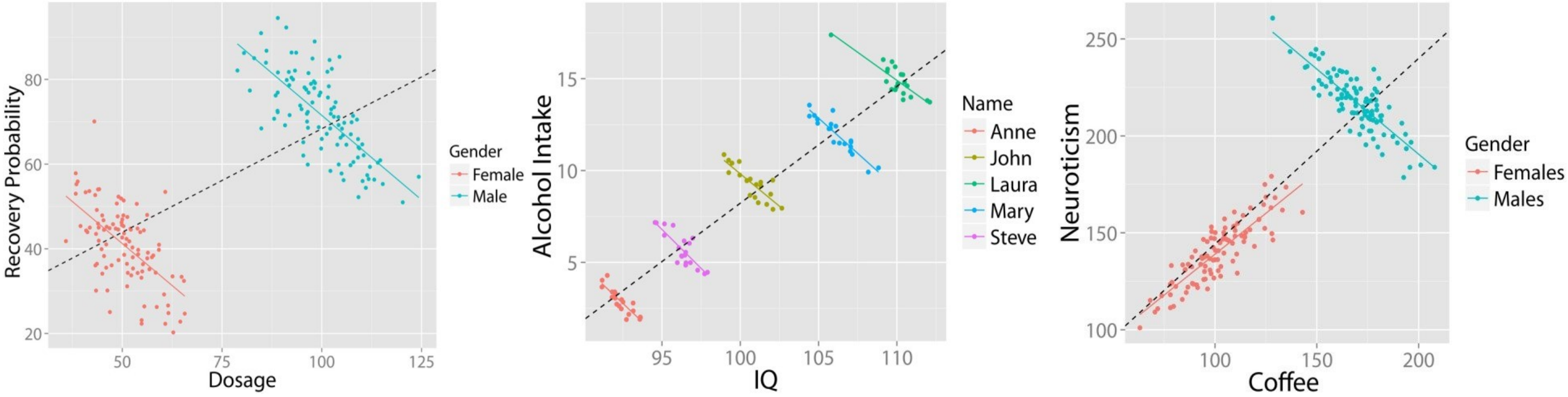
	Traitement 1		Traitement 2	
Petits calculs	93 %	-	87 %	303/350
Gros calculs	73 %	255/350	69 %	-
Total	73 %	255/**350**	87 %	303/**350**

Cas honnête

	Traitement 1		Traitement 2	
Petits calculs	93 %	163/**175**	87 %	152/**175**
Gros calculs	73 %	128/**175**	69 %	120/**175**
Total	83 %	291/**350**	78 %	272/**350**

Le paradoxe de Simpson (3)

- Une **corrélation peut disparaître, voire s’inverser**, selon que l’on considère les données **agrégées** ou **segmentées** par groupes
  - Tendances **négatives dans les échantillons rouge et bleu**
  - Mais **tendance positive sur la population globale** (- - - -) = inversée !
- → nécessité d’avoir des **groupes homogènes** (expériences « **randomisées** ») : ici, **la taille des calculs doit être uniformément répartie entre les 2 traitements**



https://www.researchgate.net/figure/Example-of-Simpsons-Paradox-Despite-the-fact-that-there-exists-a-negative-relationship_fig1_256074671

Les admission à (UC) Berkeley en 1973

Global		Hommes		Femmes	
Candidats	Admis	Candidats	Admis	Candidates	Admises
12763	41 %	8442	44 %	4321	35 %

Les femmes semblent globalement moins admises… mais ...

- En orange, les candidat(e)s plus nombreux
- En vert, le meilleur taux de réussite
- En bleu, le moins bon taux de réussite
- **En gras, les 2 départements les plus demandés**

Département	Global		Hommes		Femmes	
	Candidats	Admis	Candidats	Admis	Candidates	Admises
A	1246	73 %	**1138**	73 %	108	82 %
B	585	63 %	**560**	63 %	25	68 %
C	918	35 %	325	37 %	**593**	34 %
D	792	34 %	417	33 %	375	35 %
E	584	25 %	191	28 %	**393**	24 %
F	714	7 %	373	6 %	341	7 %
Total	**4526**	**39 %**	**2691**	**45 %**	**1835**	**30 %**

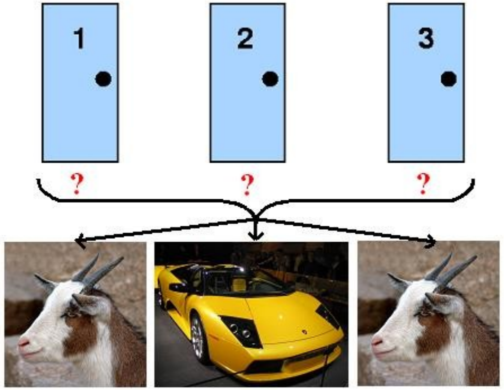
Les F choisissent des départements plus sélectifs

Les données regroupées et corrigées ont montré un « biais faible mais statistiquement significatif en faveur des femmes ».

Les données : https://discovery.cs.illinois.edu/dataset/berkeley/ Analyse : https://homepage.stat.uiowa.edu/~mbognar/1030/Bickel-Berkeley.pdf

Le problème de Monty Hall

- Un joueur est face à 3 portes fermées, qui cachent 1 voiture et 2 chèvres
- Le joueur choisit une porte
- Le présentateur ouvre une autre porte, derrière laquelle il y a une chèvre
- Le candidat peut alors changer de porte : a-t-il intérêt à le faire ?



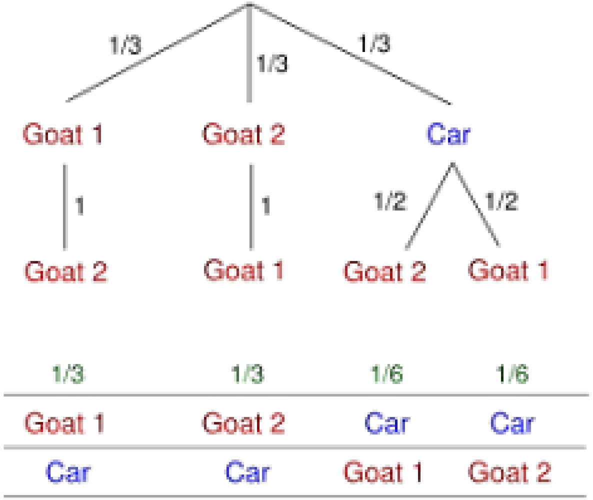
Solution proposée par Marilyn vos Savant (QI le plus élevé du monde – 228) :
il faut changer de porte !

Choix du joueur

Présentateur

Maintien

Changement



Arbre de probabilités

http://writingtoexpressourselves.blogspot.com/2007/03/monty-hall-problem.html
https://www.historyen.com/marilyn-vos-savant-iq-intelligence/

Le problème de Monty Hall (2)

- Résolution mathématique : **formule des probabilités totales**
  - G : « gagner »
  - B : « j'avais choisi la bonne porte »

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G\cap B) + P(G\cap \bar{B}) \\ &= P(G|B).P(B) + P(G|\bar{B}).P(\bar{B}) \\ &= 1/3.P(G|B) + 2/3.P(G|\bar{B}) \end{aligned}$$

- Probabilité de gagner = probabilité de gagner après avoir choisi initialement la bonne porte (sans changer) + probabilité de gagner après avoir choisi initialement une mauvaise porte (en changeant)
- Définitions :
  - P(G|B) = probabilité de G **sachant** B = probabilité de gagner sachant que j'ai choisi la **bonne** porte
  - P(G|$\bar{B}$) = probabilité de G **sachant** $\bar{B}$ = probabilité de gagner sachant que j'ai choisi une **mauvaise** porte

- Deux stratégies :
  - « Je ne change pas de porte »
    → alors je gagne si et seulement si j'avais choisi initialement **la bonne porte**

$$P(G|B)=1 \text{ et } P(G|\bar{B})=0 \Rightarrow P(G)=\frac{1}{3}$$

  - « Je change de porte »
    → alors je gagne si et seulement si j'avais choisi initialement **une mauvaise porte**

$$P(G|B)=0 \text{ et } P(G|\bar{B})=1 \Rightarrow P(G)=\frac{2}{3}$$

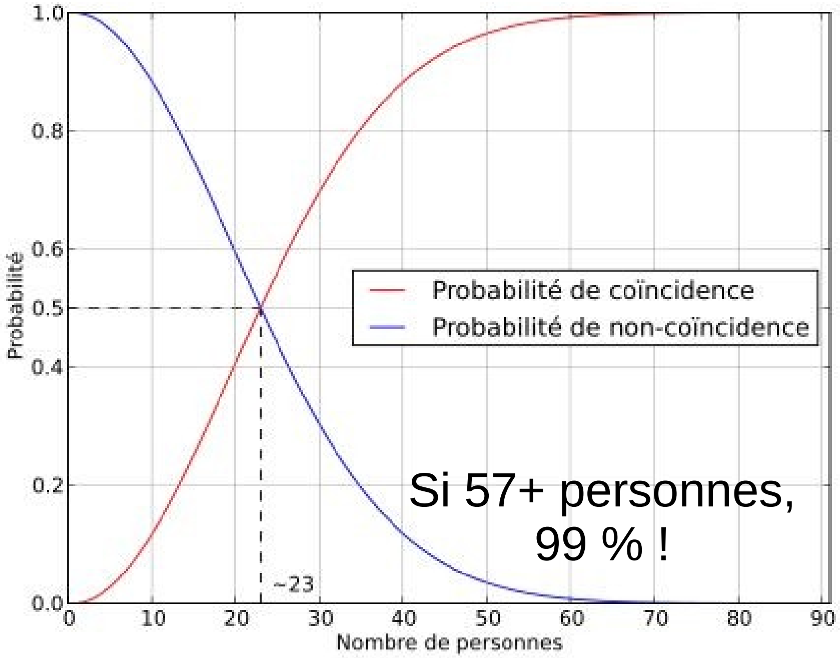
« Paradoxe » des anniversaires

- À partir de quelle taille de groupe a-t-on au moins **50 % de chances que 2 personnes aient leur anniversaire le même jour ?**
- On note cette probabilité **p(n)**

$$\bar{p}(n)=\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\ldots\times\frac{365-(n-1)}{365}=\frac{365!}{(365-n)!}\cdot\frac{1}{365^n}$$

Plutôt un résultat contre-intuitif qu'un paradoxe

- On calcule la **probabilité $\bar{p}$(n) que tout le monde ait un jour d'anniversaire différent** :
  - $1^{ère}$ personne : jour j
  - $2^{ème}$: 364 possibilités, $\pi(2)$ = 364/365
  - $3^{ème}$: 363 possibilités, $\pi(3)$ = 363/365
  - Etc … **$\bar{p}$(n) = 1 x π(2)x π(3)...x π(n)**



Si 57+ personnes, 99 % !

Boules noires et boules blanches

Pas vraiment un paradoxe non plus...

- Vous êtes prisonnier. Vos geôliers vous tendent 2 sacs opaques contenant respectivement 50 billes noires et 50 blanches
- Ils vous proposent de tirer une bille dans un sac : blanche, ils vous gardent, noire, ils vous libèrent.
- **Comment organiser les billes pour maximiser vos chances ?**

Réponse : mettre une boule noire dans un sac et toutes les autres dans l'autre

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{49}{99}=74,7\,\%$$

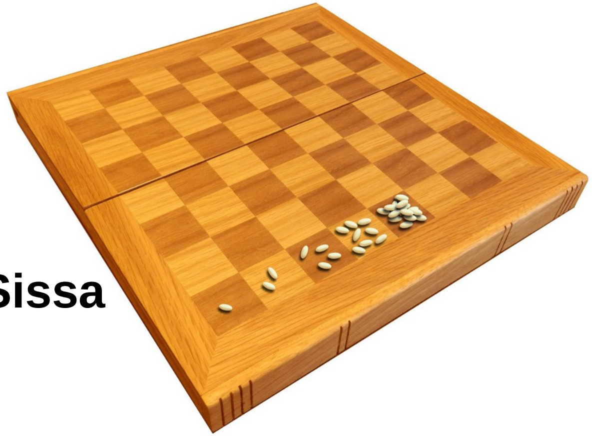
https://www.etsy.com/fr/listing/1092712046/1-paire-de-boules-de-vote-noires-et

Paradoxes logiques

Le paradoxe du tas

- Ou « **paradoxe sorite** » :
  - Si on enlève un grain d'un tas de grains, on a toujours un tas de grains
  - Si on enlève un 2ème grain, on a toujours un tas de grains, et ainsi de suite…
  - On peut donc retirer des grains indéfiniment et toujours avoir un tas de grains…
- Application d'une **action quantitative** à un **concept qualitatif** (imprécision du langage usuel) → problème
- La **logique floue** permet de dépasser le paradoxe en introduisant une continuité des valeurs de vérité $\{0;1\} \rightarrow [0;1]$
  - Si on enlève un grain, ça reste un tas (à 99 %)
  - Si on enlève n grains, ça reste un tas (à 99 %)^n
  - $0{,}99^n \rightarrow 0$

Échiquier de Sissa



On place :

- 1 grain sur la 1ère case
- 2 grains sur la 2ème case
- 4 grains sur la 3ème case
- 8 grains sur la 4ème case, etc.
- Sur la dernière case : 9×10^{18} grains
- Au total : 18×10^{18} grains
- 1000 grains pèsent environ 30g → ~550 millions de tonnes = **production mondiale annuelle !**

L’œuf ou la poule

Qu'est-ce qui est apparu en premier : l'œuf ou la poule ?

- L'œuf vient en premier… dans la question
- Dieu créa deux poussins
- Le coq, Dieu créa ensuite la poule à partir d'une de ses côtes
- Réponse « façon koan » : « Oui »

- **Paradoxe sorite** : comment définit-on une poule, limite avec d’autres espèces ?
- **Changement graduel plutôt que limite franche** : à aucun moment dans la chaîne d'ancêtres, il n'est possible de mettre une limite entre un ancêtre poule et un ancêtre non-poule...

Pour une discussion plus détaillée : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_l%27%C5%93uf_et_de_la_poule

Paradoxe du fromage à trous

- Plus il y a de fromage, plus il y a de trous ;
- or, plus il y a de trous, moins il y a de fromage ;
- donc, **plus il y a de fromage, moins il y a de fromage**.

- **Syllogisme** : **raisonnement logique** mettant en relation au moins trois propositions : deux (ou plus) « **prémisses** » mènent à une « **conclusion** »
- Formalisé par Aristote dans son Organon : permet de mettre deux termes, le **majeur** et le **mineur**, en lien dans une conclusion grâce à un moyen **terme**

	Termes		Contexte
Prémisse majeure	**majeur** plus il y a de fromage	**moyen** plus il y a de trous	Volume croissant Densité constante
Prémisse mineure Or…	**moyen** plus il y a de trous	**mineur** moins il y a de fromage	Volume constant Densité décroissante
Conclusion Donc…	**majeur** plus il y a de fromage	**mineur** moins il y a de fromage	Confusion des contextes

Il s'opère un **glissement sémantique** (évolution du sens)
entre les termes moyens des deux prémisses → **conclusion erronée**

Paradoxes auto-référentiels

- On parle d'« hétéroréférence » lorsqu'un mot / une phrase se réfère à un élément extérieur
- On parle d' « autoréférence » lorsqu'un mot / une phrase se réfère à lui-même.
  - Exemple : « Cette phrase est écrite en français »
  - Les phrases autoréférentielles peuvent être paradoxales

- Reposent sur le principe de non-contradiction : « Une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps » : on ne peut affirmer à la fois p et $\overline{p}$

https://www.pinterest.com/pin/343892121547495457/

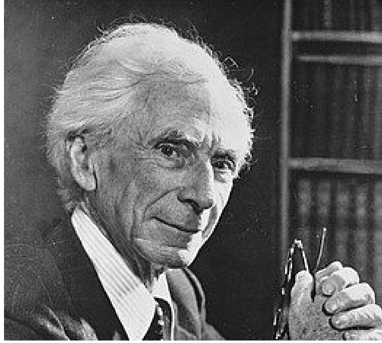
Le paradoxe du menteur

- Ou paradoxe d'Épiménide : « Tous les Crétois sont des menteurs. »
- Variantes :
  - Je mens.
  - Je ne dis jamais la vérité.
  - Cette déclaration est fausse.
- La logique mathématique échappe à ce paradoxe du menteur du fait de sa **formalisation**

- Variantes pas auto-référentielles :
  - La phrase suivante est fausse. La phrase précédente est vraie.
  - La carte de Jourdain

RECTO	La phrase de l'autre côté de cette carte est VRAIE.
VERSO	La phrase de l'autre côté de cette carte est FAUSSE

Le paradoxe de Russell (1901)



- Reformulable sous le « **paradoxe du barbier** » : un barbier rase (tous et seulement) les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Doit-il se raser ?
- **Théorie des ensembles**
  - Un ensemble « **ordinaire** » n'appartient pas à lui-même = n'est pas un élément de lui-même
    (ex : **l'ensemble des oranges n'est pas une orange**)
  - Un ensemble « **extraordinaire** » appartient à lui-même = est lui-même un de ses éléments
    (ex : **l'ensemble des ensembles est extraordinaire**)

- **« L'ensemble des ensembles ordinaires est-il ordinaire ou extraordinaire ? »**
- Autre formulation : « **L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ? »**
  - **S'il est ordinaire, il n'appartient pas à lui-même, donc il est extraordinaire !**
  - **S'il est extraordinaire, il appartient à lui-même, donc il est ordinaire !**

Le paradoxe de Russell

- Le problème persista lorsque l'énoncé fut traduit mathématiquement
- On définit y l'ensemble des ensembles x qui n'appartiennent pas à eux-mêmes

$$y = \{ x \mid x \notin x \}$$

$$y \in y \Rightarrow y \notin y \quad \text{et} \quad y \notin y \Rightarrow y \in y \,, \quad \text{soit}$$

$$\boldsymbol{y \in y \Leftrightarrow y \notin y}$$

- Pas seulement un paradoxe, c'est une **contradiction logique** !
- **Une théorie contenant A** $\Leftrightarrow$ **$\bar{A}$ est dite** « **incohérente** »

- Créa une **crise dans les mathématiques**, dans un domaine que l'on croyait **universel** et **indiscutable**
- Cette contradiction apparaît dans la « **théorie naïve des ensembles** » (intuitive), elle est résolue dans la « **théorie des types** » :
  - à un ensemble ne peuvent appartenir que des objets (éventuellement des ensembles) **de type strictement inférieur au type de l'ensemble initial**
  - on ne peut tout simplement plus écrire l'énoncé paradoxal d'auto-appartenance « x $\in$ x »
  - (Voir également la théorie des classes)
- Mais arrivèrent bientôt les **théorèmes d'incomplétude de Gödel**

Théorèmes d'incomplétude de Gödel (1)

- Les notions de « **vrai** » et de « **démontrable** » sont **distinctes**
- **Méthode axiomatique** : on part d'axiomes et on démontre des théorèmes
  - **Axiome** = proposition non démontrée utilisée comme fondement d'un raisonnement ou d'une théorie mathématique (équivalent au principe en physique)
    - Ex : tout nombre entier a un successeur par addition de 1
  - On souhaite choisir un système d'axiomes « **parfait** », c'est-à-dire :
    - **Complet** : tout ce qui est vrai est démontrable et tout ce qui est faux est réfutable
    - **Cohérent** : on ne peut aboutir à A et $\overline{A}$

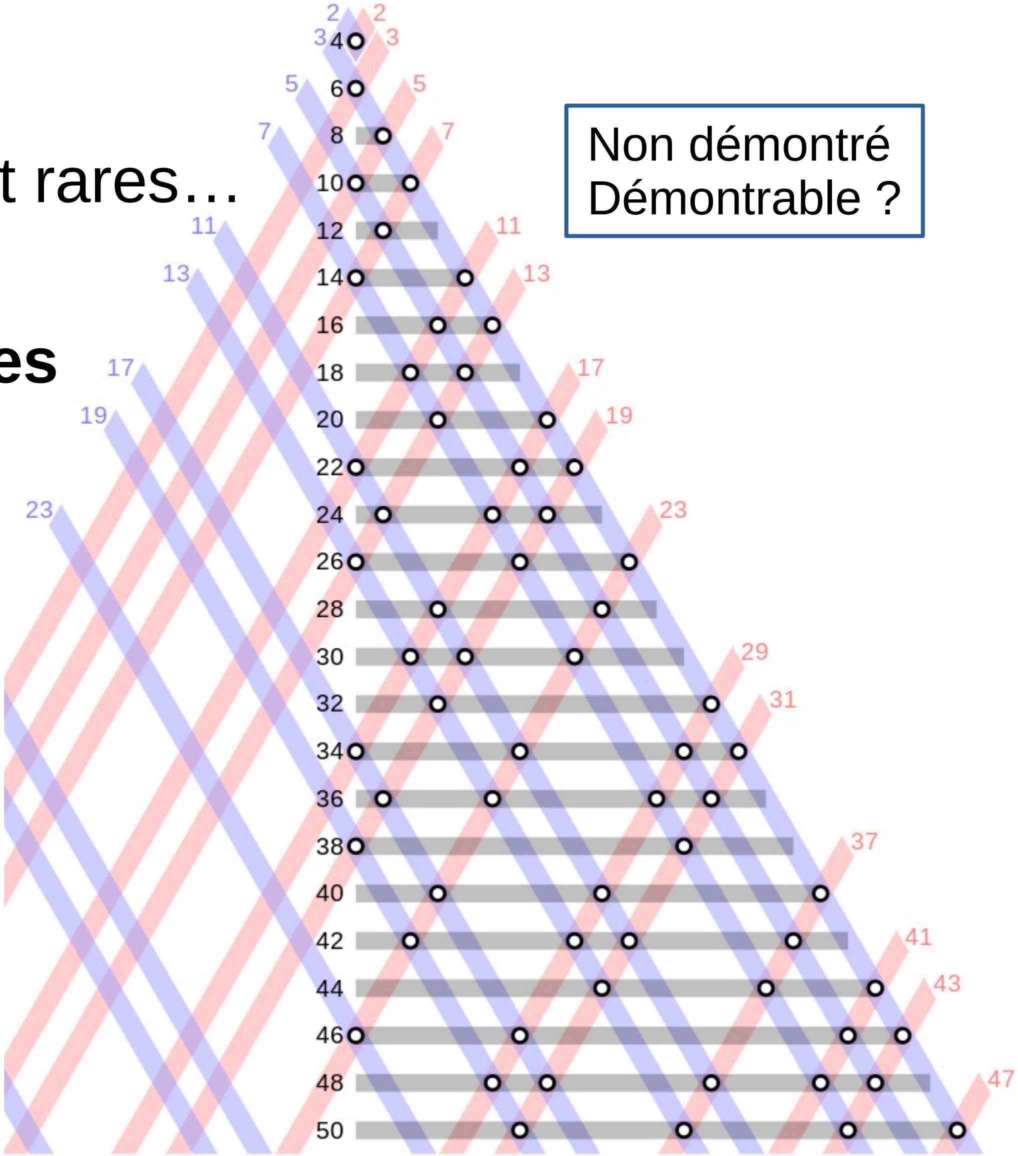
Théorèmes d’incomplétude de Gödel (2)

- 1er théorème : en arithmétique, il y aura toujours des affirmations ni démontrables ni réfutables = « **indécidables** », **même si elles sont vraies**…
  - Un système logique ne pourra jamais prouver toutes les informations qu’il avance, même si elles sont vraies
  - Un système **cohérent** est **incomplet**
    - Un système ne peut être cohérent et complet
- 2ème théorème : on ne peut pas démontrer qu’un système d’axiomes est cohérent en restant dans ce système

Synthèse

- Heureusement, les problèmes sont rares…
- Et ils peuvent se résoudre en **complétant le système d'axiomes**
- → **Problème conceptuel qui ne pose pas beaucoup de problèmes en pratique**

- Ex : **Conjecture de Goldbach**
  - Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers



Non démontré
Démontrable ?

Paradoxes de l’omnipotence

- Si Dieu est tout-puissant, peut-il créer une pierre si lourde qu’il ne pourrait la soulever ?
- Dieu peut-il faire le mal ?
  - Pie X (1912) : « Dieu ne peut pas faire le mal, parce qu'il ne peut pas le vouloir, étant la bonté infinie »

Pour aller plus loin

- https://inspe.univ-reunion.fr/fileadmin/Fichiers/ESPE/bibliotheque/expression/18/Genard.pdf
- https://youtu.be/82jOF4Q6gBU
- https://youtu.be/2CqApwhwcTc