

Paradoxes (1)

Théorie du choix social

« Si voter changeait quelque chose, il y a longtemps que ça serait interdit. »

Coluche



Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées
Images : Wikipedia sauf mention contraire

Inception, Christopher Nolan, 2010

Définition

- Définition (Robert)
 1. Opinion qui va à l'encontre de l'opinion communément admise.
 2. Association de deux faits, de deux idées contradictoires.
- D'après le grec ancien παράδοξος / parádoxos, « contraire à l'opinion commune »

Utilité des paradoxes

- Deux grands rôles :
 - mettre à mal une théorie ou un concept (dialectique)
 - Révéler une contradiction
- Ont eu une place importante dans l'évolution des mathématiques
 - Lorsque l'on réalise qu'une théorie aboutit à un paradoxe, il faut la corriger
 - Effets **inhibants** ou **stimulants**
- Reposent sur le **principe de non-contradiction** :
« Une affirmation ne peut être vraie et fausse en même temps » :
on ne peut affirmer à la fois p et \bar{p} (non- p)

Paradoxe d'Abilene (1)

Un jeune couple est en visite chez les parents de la femme.

Le père propose d'aller dîner à Abilene, à 80 kilomètres.

- La femme dit : « Ça paraît une bonne idée. »
- Le mari est plutôt réservé mais il croit que ses préférences divergent de celles du groupe et dit : « Ça me semble bien. J'espère juste que ta mère en a envie. »
- La mère dit alors : « Bien sûr que j'en ai envie. Ça fait longtemps que je ne suis pas allée à Abilene. »

Le trajet est pénible et la nourriture est mauvaise. Ils rentrent épuisés.

- L'un d'eux dit : « C'était une super balade, hein ? »
- La mère : « En fait j'aurais préféré rester à la maison mais j'ai accepté car vous étiez si enthousiastes. »
- Le mari dit : « Je n'y suis allé que pour vous. »
- La femme dit : « J'ai accepté pour vous faire plaisir. »
- Le père dit : « J'ai proposé ça parce que je pensais que vous vous ennuyiez. »

Le paradoxe empathique des deux petits vieux

Un couple d'octogénaires, très liés l'un à l'autre, évoque de vieux souvenirs. Le mari dit : « Tu te souviens, lors de notre premier repas ? J'avais coupé le pain en mettant la croûte d'un côté et la mie de l'autre. Je t'avais donné le meilleur : la mie, et tu l'as prise avec joie. Et pendant toutes ces années, j'ai fait la même chose. Ça me faisait tellement plaisir de te laisser ton morceau préféré. Quant à moi, j'ai mangé le morceau que j'aimais le moins pendant cinquante ans, la croûte, juste pour te voir prendre plaisir à manger ton morceau préféré. » La vieille femme prend alors la parole et dit : « Et bien je vais te dire un secret. Pendant toutes ces années, c'était la même chose pour moi : je déteste la mie, c'est la croûte que je préfère, mais ça me faisait tellement plaisir de voir que tu étais content... »

Paradoxe d'Abilene (2)

- Introduit par Jerry Harvey en 1974 dans son article : "The Abilene Paradox: The Management of Agreement"
- **Un ensemble de personnes fait collectivement un choix qui va à l'encontre des préférences de la plupart/totalité des membres du groupe**
- Alors que **chaque individu croit que son choix est aligné sur les préférences des autres**
- Chaque individu **renonce à sa préférence personnelle**, pensant qu'elle diffère de celle des autres, **pour ne froisser personne**
- Parade : créer de la **sécurité**, encourager l'**honnêteté** même si opinion minoritaire, **accepter les désaccords**

Théorie du choix social

- À la rencontre de **l'économie**, la **théorie de la décision** et la **théorie politique**
- Étudie la manière dont la **combinaison d'opinions individuelles** peut mener à un **classement des choix possibles**, voire à une **décision unique, au niveau collectif**
 - **Fonction de choix social** = règle qui définit une préférence collective à partir des préférences individuelles
- Question fondamentale : le niveau collectif est-il cohérent avec le niveau individuel ?
 - **problèmes et paradoxes...**

Le paradoxe du vote

- Ou **paradoxe de la participation** : Anthony Downs, 1957
- Si beaucoup de votants, **probabilité qu'un vote soit décisif (« pivot ») quasi nulle**
- Donc **coût d'aller voter** (inscription, déplacement, attente) vraisemblablement **supérieur à l'espérance de gain / d'utilité**
- Green, Gerber et Larimer (2008) : participation expliquée par l'**utilité** que les citoyens retirent de l'**accomplissement de leur devoir civique**
 - **satisfaction intrinsèque** d'un comportement conforme à une norme
 - **incitations extrinsèques à s'y conformer** (dans une expérience, participation nettement plus élevée parmi ceux qui ont reçu des courriers promettant de faire connaître leur participation à leurs proches)
 - importance de la **pression sociale** en tant qu'incitation à la participation politique
- + culpabilité de ne pas aller voter / culpabilisation?



Le paradoxe d'Ostrogorski

- On suppose qu'il n'y a que **2 partis** : D & G
- Qui se prononcent sur **3 thèmes**
 - (Normalement $2^3=8$ possibilités, supposons que seules 4 sont choisies)
- Quelles sont les préférences de la population ?

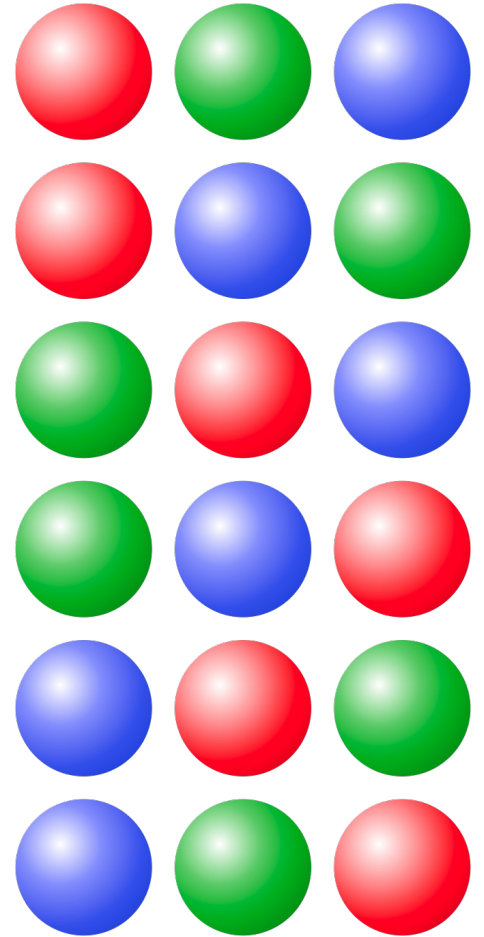
Proportion de votants	Thème 1	Thème 2	Thème 3	Parti choisi
20 %	G	G	D	G
20 %	G	D	G	G
20 %	D	G	G	G
40 %	D	D	D	D

- **G est élu avec 60 % des votes**
- **Alors que D majoritaire sur chaque thème**

Un peu de mathématiques...

- Comment classer 3 éléments sur 3 places ?
- « **permutation** » = réarrangement d'objets **discernables**
 - 1^{ère} place : 3 choix
 - 2^{ème} place : 2 choix
 - 3^{ème} place : 1 choix
- Nombre de **permutations** : $3 \times 2 \times 1 = 6 = 3 !$
« **factorielle** » : $n ! = n.(n-1).(n-2). \dots 3.2.1$
21 personnes : $21! = 5 \times 10^{19} !!$

- Équivalent de Stirling $n ! \sim \sqrt{2 \pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$



Paradoxe de Borda

- Mis en lumière en 1770 par Jean-Charles de Borda (académicien belge)
- Un scrutin appelant à choisir **parmi 3+ candidats** peut élire un individu qui aurait été battu en duel par tous les autres
- Donc une élection par la voie majoritaire peut engendrer **une majorité de mécontents !**

- Scrutin à 1 tour (68 millions de votants) :
 - **Marie-Odile (1+2 : 25)**
 - Ghislaine (3+4 : 23)
 - Denis (5+6 : 20)
- Mais !
 - **Ghislaine préférée à Marie-Odile (3+4+6/1+2+5 : 38/30)**
 - **Denis préféré à Marie-Odile (4+5+6/1+2+3 : 37/31)**

	Candidat en position 1	Candidat en position 2	Candidat en position 3	Nombre d'électeurs avec ces préférences (millions)
1	Marie-Odile	Ghislaine	Denis	5
2	Marie-Odile	Denis	Ghislaine	20
3	Ghislaine	Marie-Odile	Denis	6
4	Ghislaine	Denis	Marie-Odile	17
5	Denis	Marie-Odile	Ghislaine	5
6	Denis	Ghislaine	Marie-Odile	15

6 « podiums » différents

Borda vs. Condorcet

- Méthode de Borda : chaque votant classe les n candidats : n points au 1^{er}, $n-1$ au 2^{ème}, ...
- Ici :
 - D : 145 M,
 - G : 134 M,
 - MO : 129 M

- Méthode de Condorcet :
 - **Principe de Condorcet** : « Si une option est préférée à toute autre par une majorité, alors elle doit être choisie. »
 - le « **vainqueur de Condorcet** » est le candidat qui **bat tous les autres en duel.**
- Ici :
 - **Ghislaine préférée à Marie-Odile** (3+4+6/1+2+5 : 38/30)
 - **Denis préféré à Marie-Odile** (4+5+6/1+2+3 : 37/31)
 - **Denis préféré à Ghislaine** (2+5+6/1+3+4 : 40/28)
 - **« D>G>MO » : vainqueur = Denis**

Le vainqueur de Borda peut coïncider avec le vainqueur de Condorcet, mais pas nécessairement !

Le paradoxe de Condorcet (1785)

- **Le vainqueur de Condorcet n'existe pas toujours !**

- Illustration :

- Il est possible qu'une majorité de votants préfèrent A à B, qu'une autre, B à C et qu'une autre, C à A : **A > B > C > A !**

- Exemple :

Groupe 1 (40%) : A > B > C

Groupe 2 (35%) : B > C > A

Groupe 3 (25%) : C > A > B

65 % préfèrent A à B (1-3) ;

75 %, B à C (1-2) ;

60 %, C à A (2-3) !

- Parfois, les décisions ainsi prises à une majorité populaire ne sont donc pas cohérentes avec celles d'un individu supposé rationnel, car son choix entre A et C serait le même selon que B est présent ou non.
 - **Transitivité** de la préférence individuelle $A > B$ et $B > C \Rightarrow A > C$, mais **non-transitivité de la préférence au niveau global** : $A > B > C > A !$
 - Comme pierre-feuille-ciseaux
 - Le problème peut se poser dans les poules d'une compétition sportive : si l'éq. 1 bat l'éq. 2, qui bat l'éq. 3, qui bat l'éq. 1
→ **autres critères** : différence de buts, ...
- En France, **le mode de scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne vérifie pas le critère de Condorcet** : le vainqueur de Condorcet, même s'il existe, n'est pas forcément le vainqueur officiel !!!
 - Élection présidentielle de 2007 en France, François Bayrou était vainqueur de Condorcet : il aurait battu Nicolas Sarkozy et Ségolène Royal au second tour

Théorème de Gibbard-Satterthwaite

- **3 électeurs** (X, Y, Z) classent **4 propositions** (a, b, c, d) **par ordre de préférence** (points = méthode de Borda) → c est choisi
- Si X change sa stratégie par un **vote « tactique »** ou **« utile »**, l'issue lui est plus favorable (moins mal) → le peuple a-t-il « parlé » ?

Points	X	Y	Z
3	a	c	c
2	b	b	b
1	c	d	d
0	d	a	a

a	3
b	6
c	7
d	2

Points	X	Y	Z
3	b	c	c
2	a	b	b
1	d	d	d
0	c	a	a

a	2
b	7
c	6
d	3

- La méthode de Borda est « **manipulable** » : parfois, un **bulletin sincère ne défend pas au mieux les préférences d'un électeur**
- Th de G-S : **une règle de vote est manipulable (sensible au vote tactique)**, sauf
 1. S'il n'y a que **deux choix** possibles.
 2. s'il y a un électeur privilégié qui dispose d'un **pouvoir dictatorial**
- Généralisé par le **théorème d'Arrow**

« Foutu pour foutu »...

Le paradoxe d'Arrow



- Dans un système où chaque électeur exprime sa **préférence de manière qualitative (classement ordinal)**, mais **pas son intensité (quantitative)**
- Condorcet : pas de système **simple** permettant d'agrégier de façon **toujours cohérente** les préférences individuelles en préférences collectives
- Théorème d'Arrow (1951, prix Nobel d'économie en 1972) = **confirmation mathématique du paradoxe de Condorcet** :
 - il n'existe aucun système assurant cette cohérence
 - Sauf si le choix collectif est celui d'un seul individu ...
= **dictature** !

Le théorème d'Arrow

- Lorsqu'au moins 2 individus se prononcent sur au moins 3 choix, il n'existe pas de **fonction de choix social** respectant les propriétés suivantes :
 1. **Universalité** : quels que soient les choix individuels, un résultat collectif existe
 2. **Unanimité** : lorsque tous les individus ont la même préférence, ce doit être le résultat collectif
 3. **Indépendance aux alternatives non-pertinentes** : une option C ne doit pas perturber le classement entre A et B
 4. **Non-dictature** : la préférence collective ne représente pas le choix d'un seul individu indépendamment de celui des autres
- On peut également remplacer l'**unanimité** (2) par les deux conditions suivantes :
 1. **Monotonie** : lorsqu'un individu classe une option plus haut, son classement global ne peut pas descendre
 2. **Souveraineté** : aucun choix collectif ne doit être *a priori* impossible
- Geneakoplos (2005) : « Toute constitution qui respecte la transitivité, l'indépendance aux alternatives non pertinentes et l'unanimité est une dictature. »

5 méthodes et ... 5 vainqueurs !

	ALBERT	ÉMILIE	OSCAR	MARINE	MAX
3 273	1	5	4	2	3
2 182	5	1	4	3	2
1 818	5	2	1	4	3
1 636	5	4	2	1	3
727	5	2	4	3	1
364	5	4	2	3	1

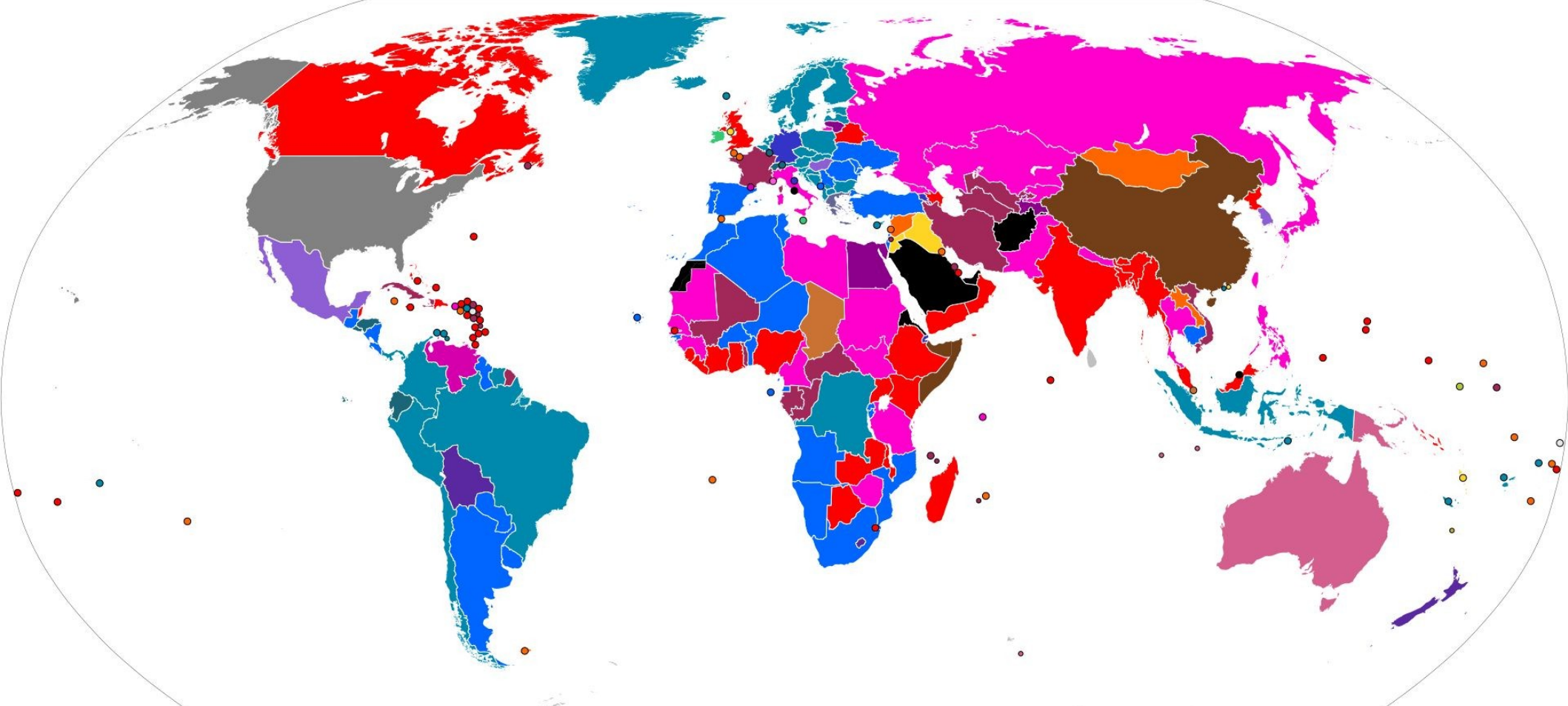
$$5! = 120$$

« Monsieur le président, avez-vous vraiment gagné cette élection ? »
[youtube.com/watch?v=vfTJ4vmlsO4](https://www.youtube.com/watch?v=vfTJ4vmlsO4)

10 000 votants

- Scrutin majoritaire à 1 tour : **Albert**
- Scrutin majoritaire à 2 tours : **Emilie**
- Éliminations successives du dernier (Max, Marine, Emilie, Albert) : **Oscar**
- Méthode de Borda (points) : **Marine**
- Méthode de Condorcet (duels) : **Max**

→ Un groupe peut-il avoir une préférence ??



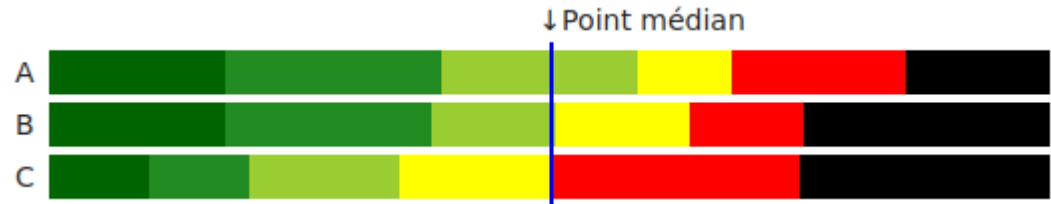
Système électoral utilisé pour élire la **chambre basse** par pays. **Système majoritaire** ■ Scrutin uninominal majoritaire à un tour ■ Scrutin uninominal majoritaire à deux tours ■ Vote alternatif ■ Scrutin majoritaire plurinominal ou mixte majoritaire uninominal et plurinominal ■ Scrutin de liste majoritaire ou mixte majoritaire uninominal et majoritaire de liste **Système semi-proportionnel** ■ Vote unique non transférable ■ Vote cumulatif modifié ■ Scrutin binominal **Système proportionnel** ■ Scrutin proportionnel plurinominal ■ Scrutin à vote unique transférable **Système mixte** ■ Scrutin proportionnel avec bonus à la liste en tête ■ Système mixte avec compensation (scrutin majoritaire uninominal à un tour et proportionnel plurinominal) ■ Système mixte avec compensation (scrutin majoritaire uninominal à deux tours et proportionnel plurinominal) ■ Système mixte sans compensation (scrutin majoritaire uninominal à un tour et proportionnel plurinominal) ■ Système mixte sans compensation (scrutin majoritaire uninominal à deux tours et proportionnel plurinominal) ■ Système mixte sans compensation (scrutin majoritaire plurinominal ou de liste et proportionnel plurinominal) ■ Système mixte sans compensation (vote unique non transférable et proportionnel plurinominal) **Autre** ■ Méthode Borda modifiée ■ Pas d'élections directes ■ Pas d'informations

Le jugement majoritaire

- Principe : une élection ne devrait pas reposer sur les **préférences** des électeurs (**comparaison** des candidats) mais sur leurs **opinions** (**jugement** des candidats)
- Permet de **contourner le théorème d'Arrow** : cette méthode satisfait l'universalité, l'unanimité, l'indépendance aux alternatives non pertinentes, l'absence de dictateur et la monotonie
- Déroulement :
 - Un seul tour, une mention par candidat
 - → « **profil de mérite** », avec une « **mention majoritaire** » = médiane (50/50) des mentions
 - **Vainqueur = candidat(e) avec la mention majoritaire la plus élevée**

	Très bien	Bien	Assez bien	Passable	Insuffisant	À rejeter
Candidat A						X
Candidat B		X				
Candidat C						X
Candidat D				X		

Candidat	Très Bien	Bien	Assez Bien	Passable	Insuffisant	À Rejeter	TOTAL
A	17,42 %	21,28 %	19,71 %	9,12 %	17,63 %	14,84 %	100 %
B	17,05 %	20,73 %	12,95 %	13,42 %	11,58 %	24,27 %	100 %
C	10,00 %	10,00 %	15,00 %	15,00 %	25,00 %	25,00 %	100 %



Plus de 50 % des votants estiment que A mérite au moins la mention « Assez bien »

Élections sans candidat

1. Présentation du mandat
2. Recensement des qualités requises
3. Vote individuel sur post-it
4. Dépouillement – « quelle est la raison de ton choix » ? (+ affichage des post-it)
5. Report de voix ?
(déplacement des post-it)
6. « Quelqu'un a-t-il une proposition parmi les personnes nommées ? »
7. Quelqu'un a-t-il une objection (raisonnable) ?
 - Consentement plutôt que consensus
8. « Acceptes-tu ? »
9. Célébration



Autres méthodes

- **Objection raisonnable** = objection avec laquelle il est possible de raisonner
- Définitions :
 - Consensus : décision validée si tout le monde OK : « tout le monde dit oui »
 - Consentement : décision si aucune objection (raisonnable) : « personne ne dit non »
 - processus à suivre, proche de l'élection sans candidat
- **Tirage au sort**

Quelques définitions

-archie (du grec arkhê, pouvoir, commandement) – qui détient le pouvoir ?

- **Hiérarchie** (hiero- : sacré) : subordination d'un échelon de pouvoir vis-à-vis d'un autre
- **Monarchie** : un chef (« monarque »)
- **Oligarchie** : un petit nombre d'individus
- **Polyarchie** : plusieurs organes de décision
- **Anarchie** : émancipation de toute autorité

Démocratie (du grec « dêmos », peuple, et « kratos », pouvoir) : forme de gouvernement dans laquelle la souveraineté appartient au peuple

Holocratie (Brian Robertson, 2001) : système dans lequel chaque partie (**holon**) est autonome et décisionnaire – organisation horizontale et pas pyramidale : dissémination des mécanismes de prise de décision dans une organisation.

-cratie – qui détient le pouvoir ?

- **Aristocratie** : élite dominante
- **Autocratie** : le souverain, qui tire son pouvoir et sa légitimité de lui-même
- **Bureaucratie** : l'administration, les fonctionnaires
- **Cacocratie** : les plus mauvais (inverse de l'aristocratie)
- **Clérocration / lotocratie** : représentants tirés au sort
- **Doxocratie** : la pensée dominante
- **Kleptocratie** : les voleurs (corruption)
- **Méritocratie** : ceux au mérite reconnu (diplômes, expérience, qualités, vertus...)
- **Ploutocratie** : les plus riches
- **Technocratie** : les experts
- **Théocratie** : représentant de Dieu sur Terre
- **Voyoucratie** : voyous

Pour aller plus loin

- http://www.electoral.fr/wp-content/uploads/2010/11/Les-math%C3%A9matiques-du-vote_VBerthet.pdf
- <https://www.irif.fr/~habib//Documents/MichelBalinski2012.pdf>
- <https://www.youtube.com/watch?v=fBYCoPAmpr4&list=PLtzmb84AoqRSmv5o-eFNb3i9z64luOjdX&pp=iAQB>
- [youtube.com/watch?v=vfTJ4vmlsO4](https://www.youtube.com/watch?v=vfTJ4vmlsO4)