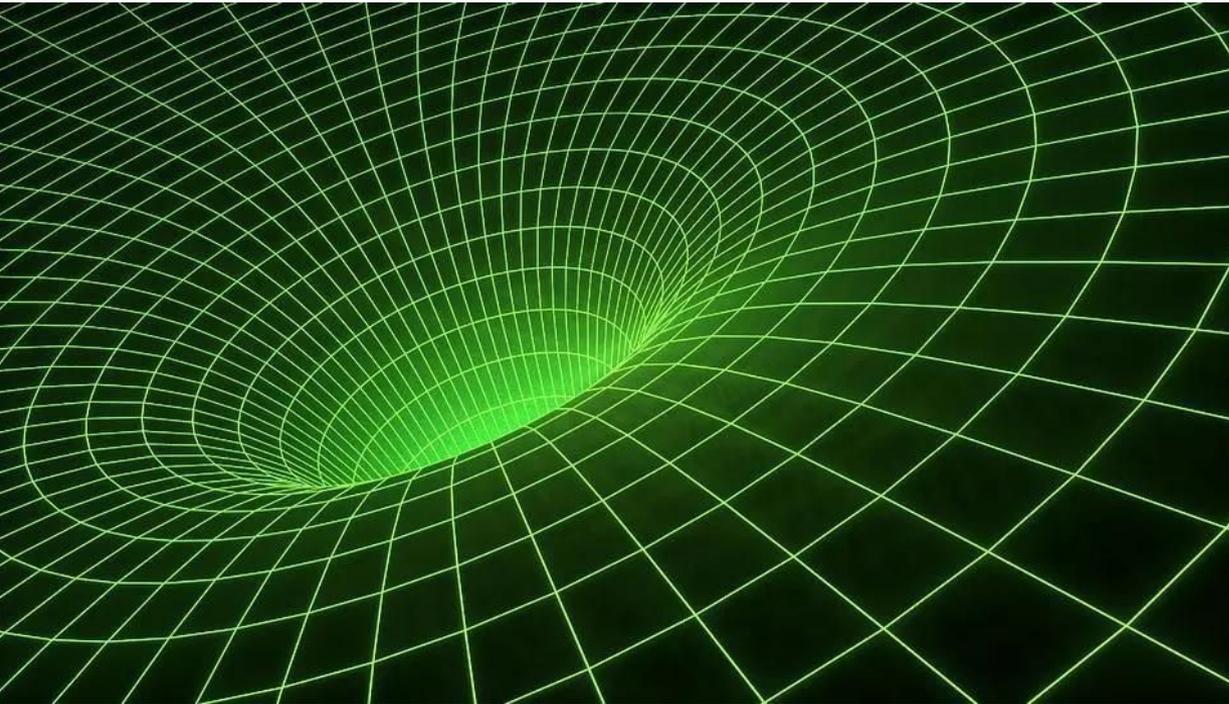


# La relativité générale

Prolongement de la mécanique classique et de la relativité restreinte  
**= théorie de la gravitation avec une vitesse de la lumière finie**



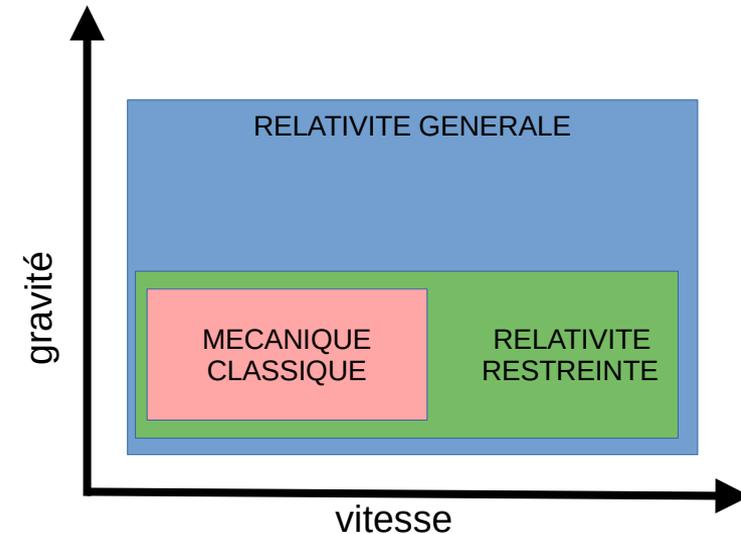
## Notions utilisées :

1. Introduction
- 2-3. Structure de la matière
4. Les ondes
7. Mécanique classique
8. Relativité restreinte

Pour une meilleure compréhension, certaines explications pourront être légèrement simplifiées/tronquées  
Images : Wikipedia sauf mention contraire

# Théorie **relativiste** de la gravitation

- Décrit l'**influence de la présence de matière** (et, plus généralement, d'**énergie**) sur le mouvement des corps
- Tient compte des **principes de la relativité restreinte** (vitesse de la lumière **finie**)
- Englobe et supprime la théorie de la **gravitation universelle** de Newton
- **Mécanique classique** = linéarisation/approximation de la relativité générale aux faibles vitesses (par rapport à  $c$ ) et aux champs gravitationnels faibles
- Développée par Albert Einstein entre 1907 et 1915 (avec des apports d'autres chercheurs, par ex. David Hilbert)



# Le principe d'équivalence



- Il existe en fait **2 masses** :

- La **masse inertielle**

(principe fondamental de la dynamique)  $\sum \vec{F} = m_I \vec{a}$

- La **masse grave**

(qui fait que nous avons un poids)

$$\vec{P} = m_G \vec{g}$$

- Principe d'équivalence :

**masse inertielle et masse gravitationnelle  
sont égales quel que soit le corps**

- Expérience « Microscope » (CNES)

- Satellite en orbite

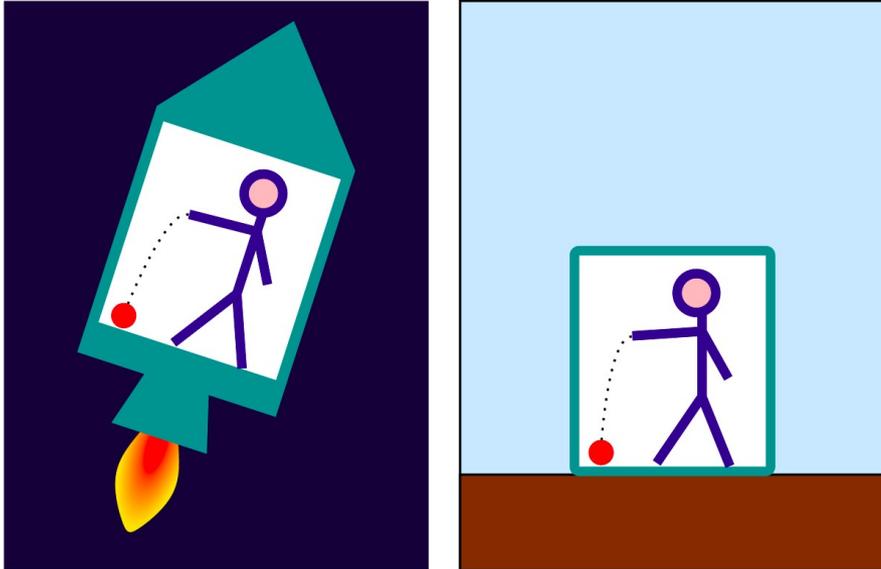
- Résultats définitifs publiés en septembre 2022

$$\eta(A, B) = \frac{\frac{m_G(A)}{m_I(A)} - \frac{m_G(B)}{m_I(B)}}{\frac{1}{2} \left( \frac{m_G(A)}{m_I(A)} + \frac{m_G(B)}{m_I(B)} \right)} < 0,4 \times 10^{-15}$$

# L'expérience de la fusée

Expérience de pensée :

Quelle seraient les différences **perçues** par un observateur dans une pièce **sur Terre** et dans une **fusée accélérant** à  $a = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ?



**Hypothèse majeure  
de la relativité  
générale : aucune !**

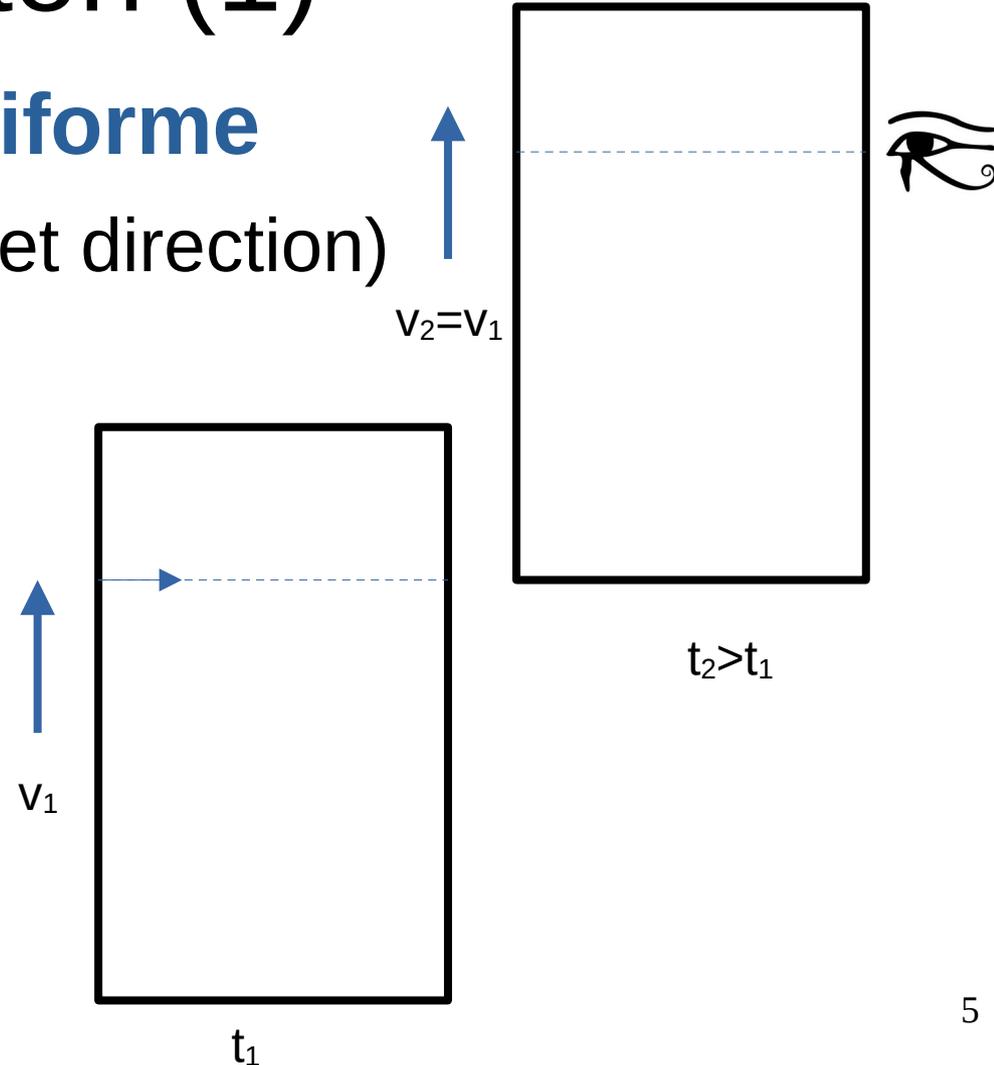
$$\sum \vec{F} = m_I \vec{a} \quad \text{et} \quad \vec{P} = m_G \vec{g}$$

$$\text{donc } m_I \vec{a} = m_G \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \vec{g}$$

« accélération de la pesanteur »

# Trajet d'un photon (1)

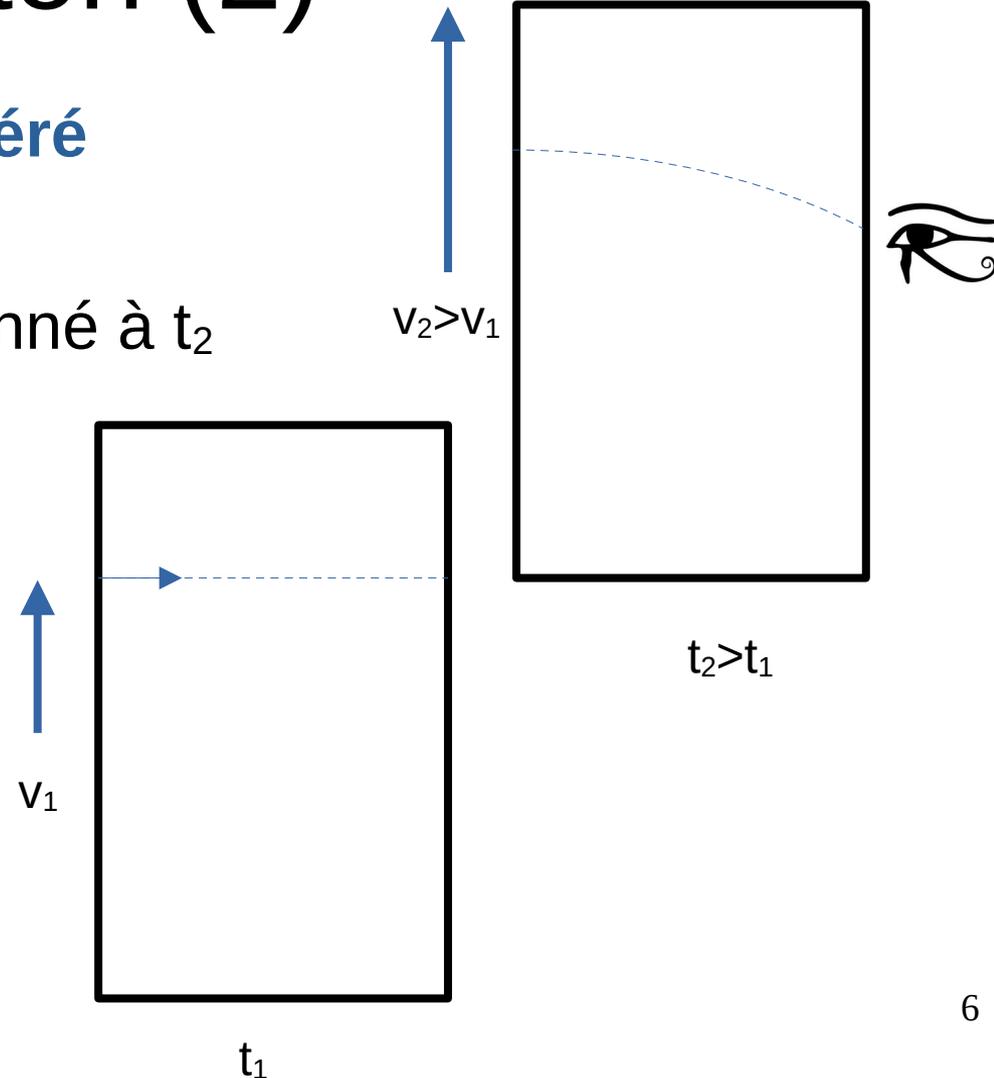
- **Mouvement rectiligne uniforme**
  - **Vitesse constante** (norme et direction)
- Un photon est émis à  $t_1$  et réceptionné à  $t_2$
- Quelle a été sa trajectoire dans le référentiel en mouvement ?
- **Rectiligne !**



# Trajet d'un photon (2)

- **Mouvement uniformément accéléré**
  - **Accélération constante** (fusée)
- Un photon est émis à  $t_1$  et réceptionné à  $t_2$
- Quelle a été sa trajectoire dans le référentiel en mouvement ?
- **Courbe !**
- **L'accélération courbe le trajet**
- **Principe d'équivalence**  $\Rightarrow$

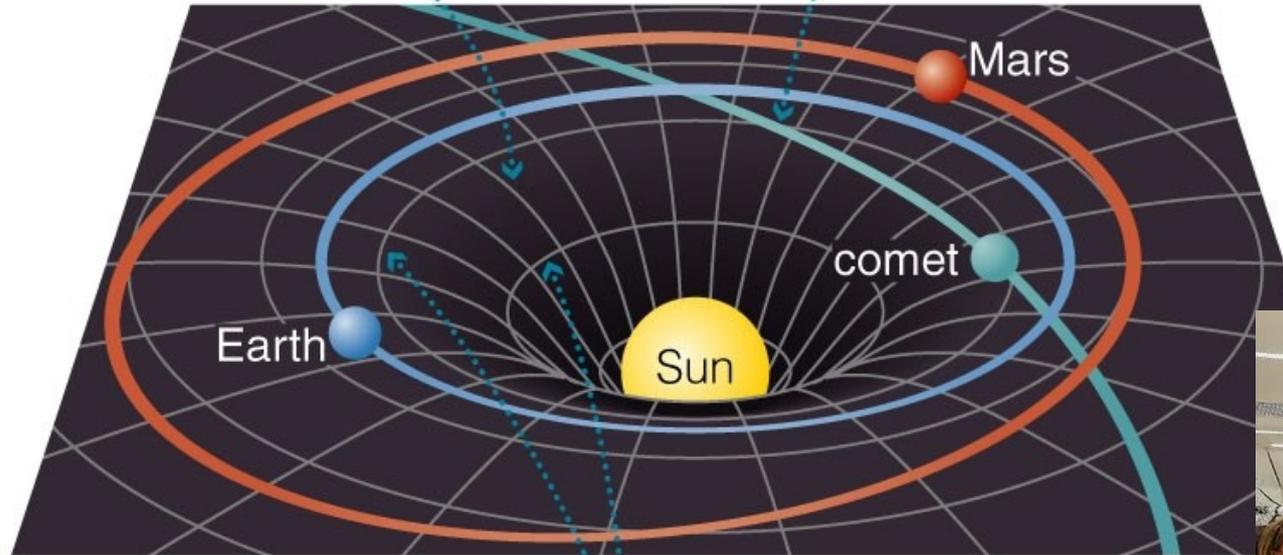
**la gravité courbe  
le trajet de la lumière**



# La courbure de l'espace-temps

*The mass of the Sun causes spacetime to curve . . .*

*. . . so freely moving objects (such as planets and comets) follow the straightest possible paths allowed by the curvature of spacetime.*



*Circles that were evenly spaced in flat spacetime become more widely spaced near the central mass.*

[http://woodahl.physics.iupui.edu/Astro100/S3-13b\\_anno.jpg](http://woodahl.physics.iupui.edu/Astro100/S3-13b_anno.jpg)  
<https://www.airzerog.com/>

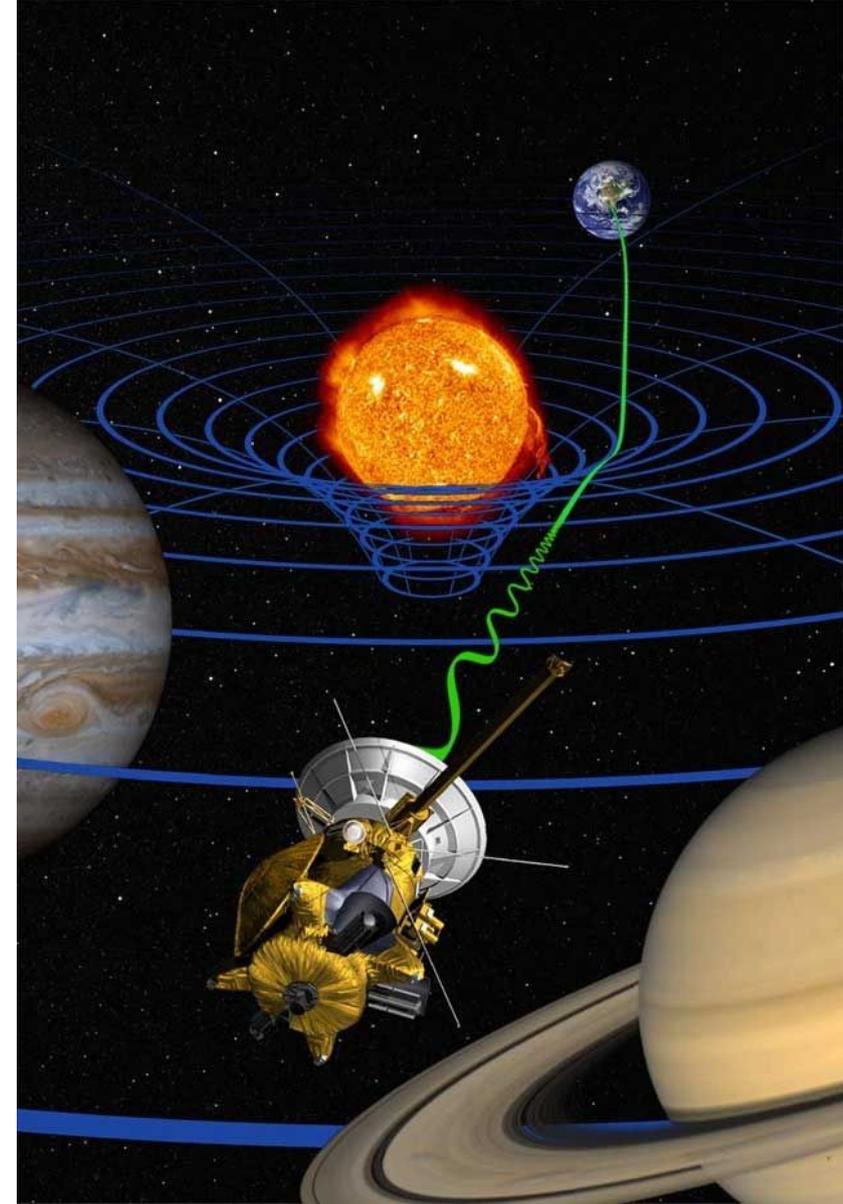
## Changement de paradigme

- Newton : les objets s'attirent parce qu'ils ont une masse
- Einstein : les masses courbent l'espace-temps autour d'elles et les corps se déplacent le long des courbes (**géodésiques**)



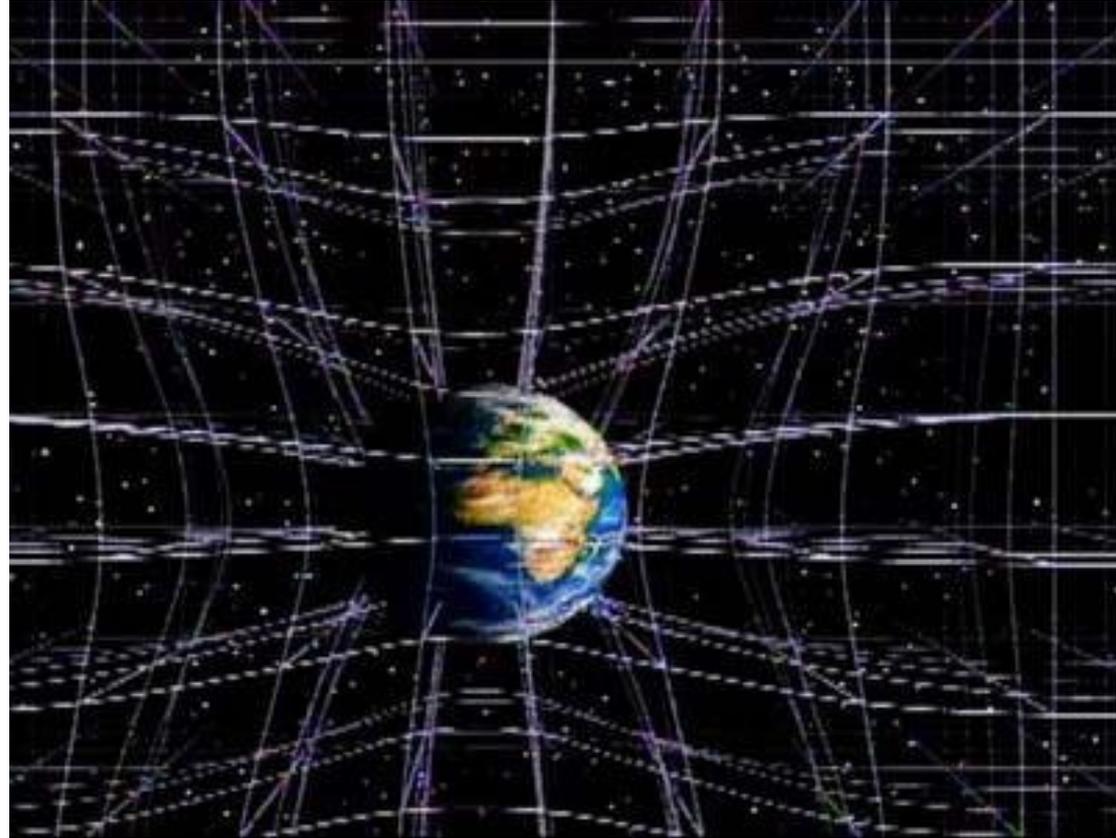
# Validation expérimentale

- Expérience de Cassini-Huygens
  - But : étudier le système saturnien
- Durant l'été 2002, Terre, Soleil et sonde sont parfaitement alignés
- Résultats publiés en 2003 : les signaux radio échangés entre la Terre et la sonde sont **retardés** par la **déformation de l'espace-temps** due à la masse du Soleil, **en accord avec la relativité générale à 99,998%**



# Un espace-temps en 3+1 dimensions

- Difficile à (se) représenter
  - Une sorte de « gel » dont la densité mesure les distances et les temps
  - En général représenté en 2D (d'espace)



# L'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8 \pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$  : tenseur de Ricci

$\Lambda$  : constante cosmologique (1917)

$R$  : courbure scalaire

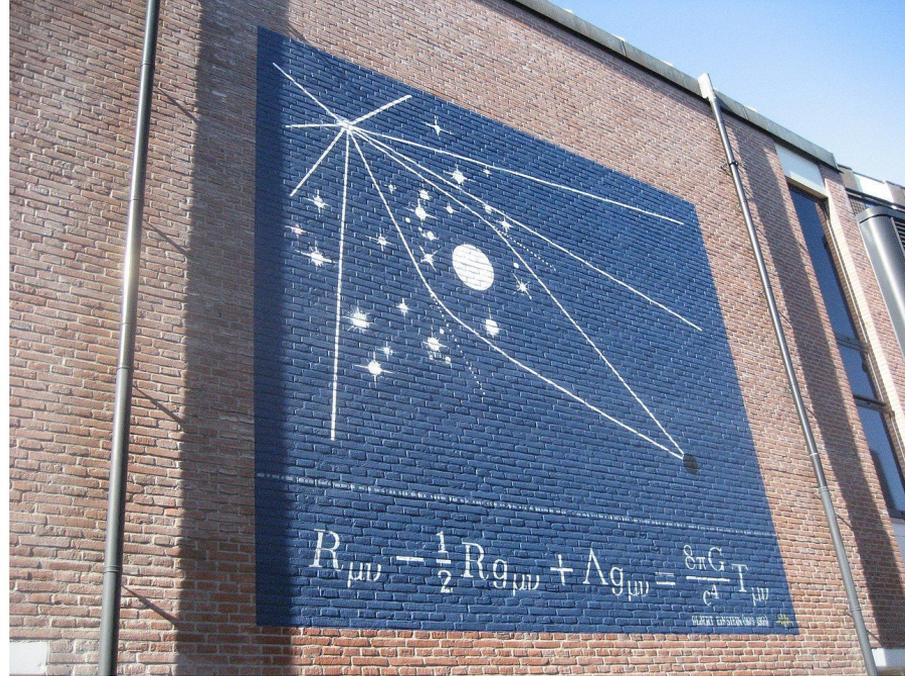
$T_{\mu\nu}$  : tenseur énergie-impulsion

$g_{\mu\nu}$  : tenseur métrique

$G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  :  
constante gravitationnelle

$$\frac{8 \pi G}{c^4} \approx 2 \times 10^{-43} \text{ N}^{-1} \quad (\text{force de très faible intensité})$$

Cette équation, présentée en novembre 1915, décrit comment la **courbure de l'espace-temps** (partie de gauche) est reliée au **contenu masse/énergie de l'Univers** (partie de droite)



$$(T_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3} = \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

# Les équations de champ d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=0}^3 \sum_{\kappa=0}^3 g^{\sigma\kappa} R_{\sigma\mu\kappa\nu}$$

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}$$

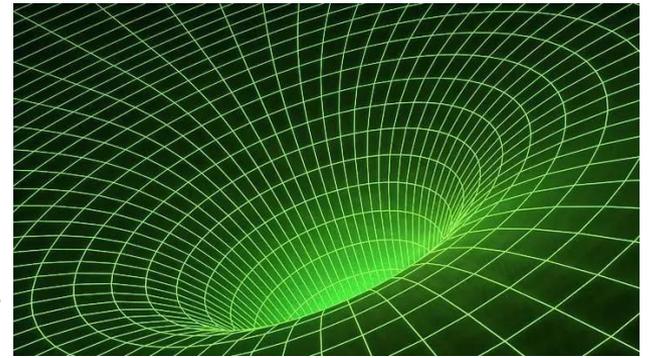
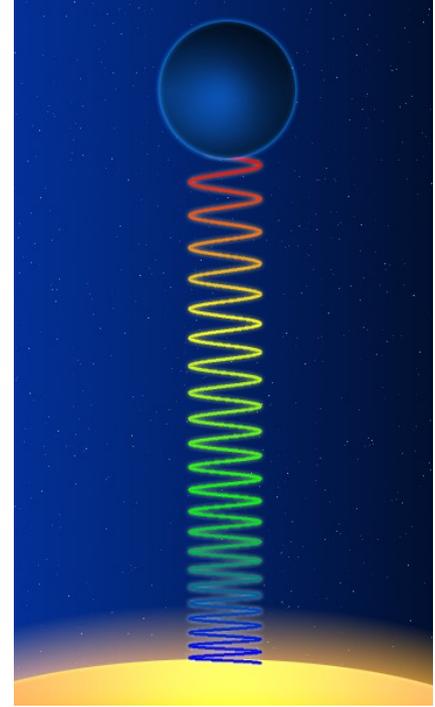
$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} \left( \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\kappa\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\kappa}} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}g_{\rho\lambda}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} \\ & - \frac{1}{2}g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}g_{\rho\lambda}\partial_{\nu}g_{\mu\beta} + \frac{1}{4}g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\nu}g_{\alpha\lambda}\partial_{\mu}g_{\rho\beta} + \frac{1}{4|g|}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \frac{1}{4|g|}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4|g|}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \\ & \sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3\sum_{\rho=0}^3\sum_{\lambda=0}^3g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}g_{\rho\lambda}\partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3\sum_{\rho=0}^3\sum_{\lambda=0}^3g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\alpha}g_{\rho\lambda}\partial_{\nu}g_{\mu\beta} + \frac{1}{4}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3\sum_{\rho=0}^3 \\ & \sum_{\lambda=0}^3g^{\beta\lambda}g^{\alpha\rho}\partial_{\nu}g_{\alpha\lambda}\partial_{\mu}g_{\rho\beta} + \frac{1}{4|g|}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \frac{1}{4|g|}\sum_{\alpha=0}^3\sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \frac{1}{4|g|}\sum_{\alpha=0}^3 \\ & \sum_{\beta=0}^3g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}|g|\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \end{aligned}$$

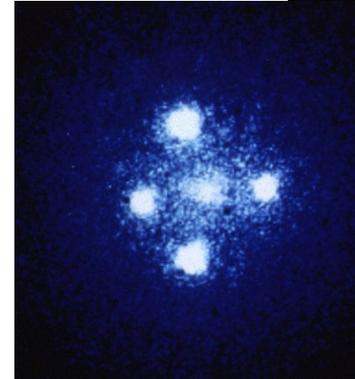
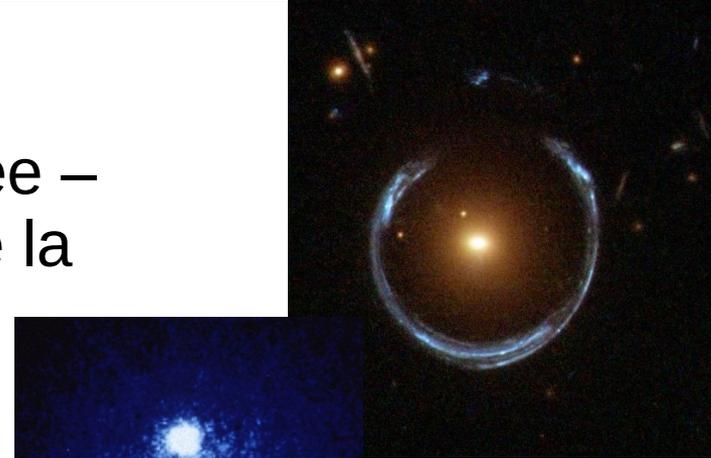
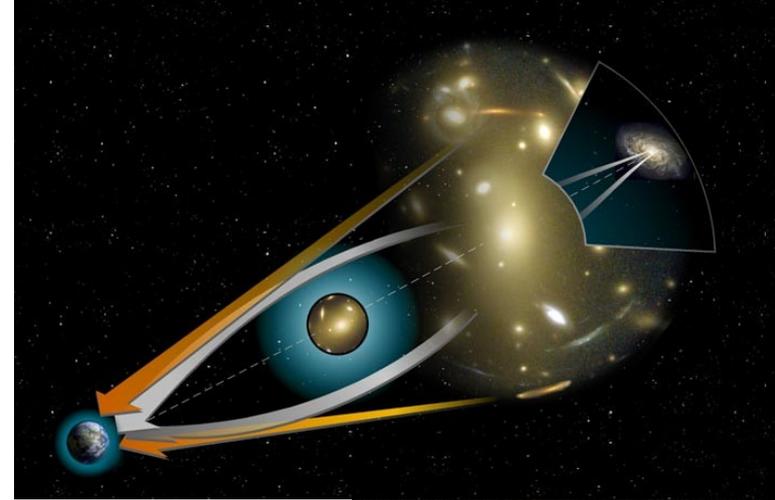
# Le décalage vers le rouge gravitationnel

- La **fréquence** d'une onde produite dans un champ de gravitation **diminue** lorsque l'onde voyage vers une zone de **gravité moindre**
  - (Autres sources de décalage vers le rouge : effet Doppler-Fizeau, expansion de l'Univers)
- Causes :
  - **dilatation du temps** créée par la **gravitation** ou
  - **contraction des longueurs** (d'onde) due à la gravitation
  - Explications équivalentes en raison de la **conservation de l'intervalle d'espace-temps**
- « L'onde perd son énergie à mesure qu'elle remonte le potentiel gravitationnel »

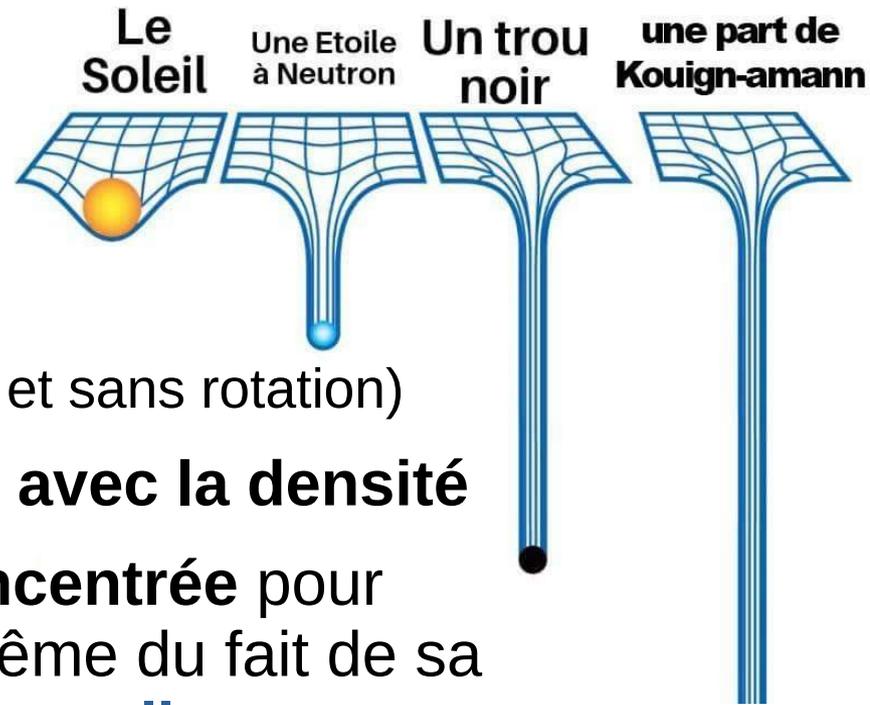


# L'effet de **lentille gravitationnelle**

- Ou « **mirage gravitationnel** »
- Lorsqu'un objet **très massif** se trouve entre l'observateur et les astres observés
  - En cas d'**alignement parfait** source observée – lentille – observateur, le mirage peut prendre la forme d'un « **anneau d'Einstein** »
  - Si obstacle allongé et corps pas alignés, le mirage peut prendre la forme d'une « **croix d'Einstein** »



# Les trous noirs



- Obtenus en résolvant l'équation d'Einstein
  - Solution trouvée par Schwarzschild en 1916 (pour une masse immobile, sphérique, neutre et sans rotation)
- La courbure de l'espace-temps **augmente avec la densité**
- Objet dont la **masse** est suffisamment **concentrée** pour qu'elle ne cesse de **s'effondrer** sur elle-même du fait de sa propre gravitation → **singularité gravitationnelle**
- → **limite de la RG...**

Il existe différentes  
« **classes** » de trous noirs

Class	Approx. mass	Approx. radius
Supermassive black hole	$10^5$ - $10^{10} M_{\text{Sun}}$	0.001-400 AU
Intermediate-mass black hole	$10^3 M_{\text{Sun}}$	$10^3$ km $\approx R_{\text{Earth}}$
Stellar black hole	$10 M_{\text{Sun}}$	30 km
Micro black hole	up to $M_{\text{Moon}}$	up to 0.1 mm

# L'horizon d'un trou noir

Ou « **horizon des évènements** »  
(« **event horizon** » en anglais)



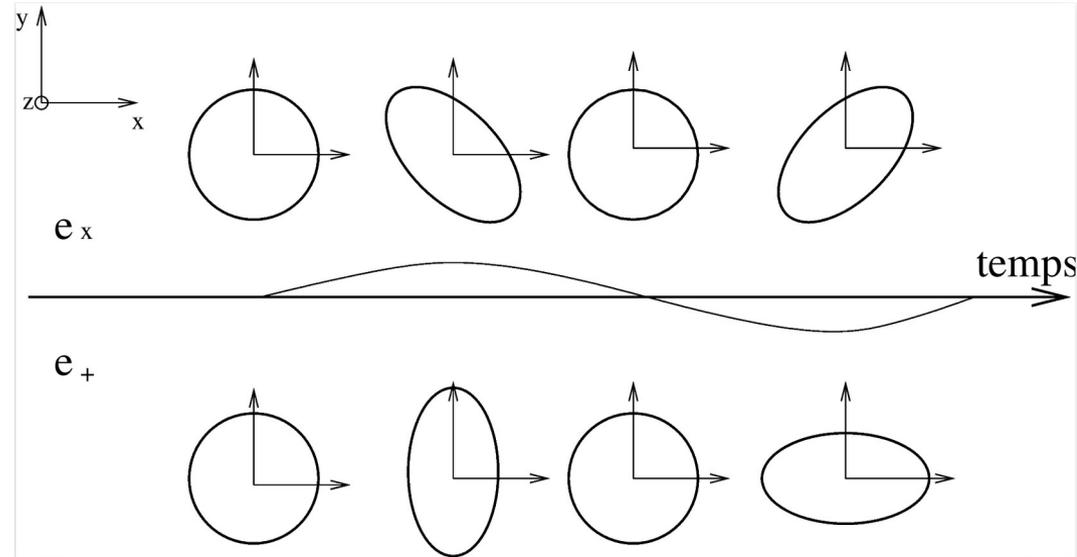
- **Distance** du centre d'un trou noir à laquelle la **vitesse de libération** atteint la **vitesse de la lumière** : **même la lumière ne peut plus sortir**
- **Rayon de Schwarzschild** = horizon d'un « trou noir de Schwarzschild » (de charge électrique et de moment cinétique nuls)
  - $R_s(\text{Terre}) = 1 \text{ cm}$  ( $r_T = 6\,370 \text{ km}$ )
  - $R_s(\text{Soleil}) = 3 \text{ km}$  ( $r_\odot = 700\,000 \text{ km}$ )
- Trou noir supermassif (au centre de nombreuses galaxies) – P.N. 2020
  - $M = 10^6 - 10^9 M_\odot$ ,  $r = 10^6 - 10^9 \text{ km}$ , soit moins que le rayon de l'orbite de Neptune
- L'Univers est-il dans un trou noir ??

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

# Les ondes gravitationnelles

- Prédites en 1916 par la relativité générale
- Ondes de **déformation de l'espace-temps**

- Pas **électromagnétiques** ni **mécaniques**
- Lorsque le mouvement d'un objet n'a **pas une symétrie sphérique**
- L'émission d'OG entraîne une **perte d'énergie** par le système



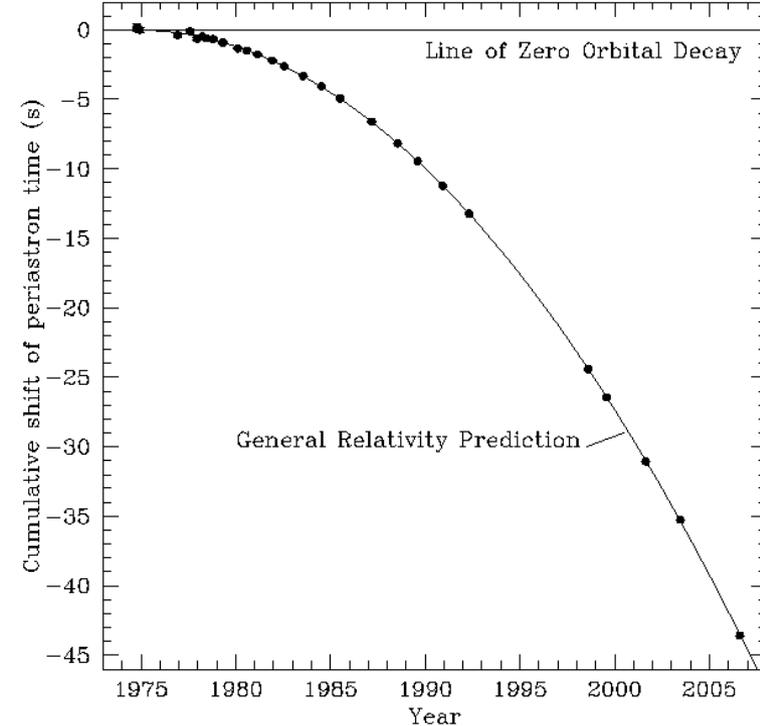
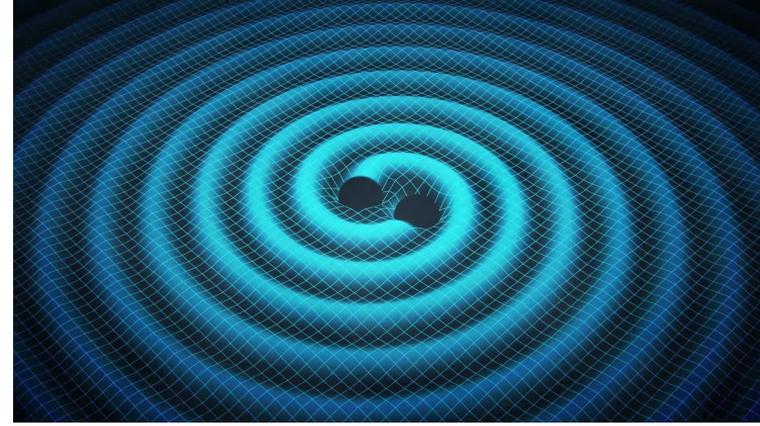
- Le passage d'une OG entraîne une variation **relative des longueurs et du temps**

# Source 1 : les systèmes binaires (1)

- Deux corps en rotation l'un autour de l'autre : étoiles, étoiles à neutrons, trous noirs, ...
- **Perte d'énergie** → **accélération de la rotation**
  - Mesurée sur le système PSR1913+16
  - Prix Nobel 1993

R. Hulse & J. Taylor

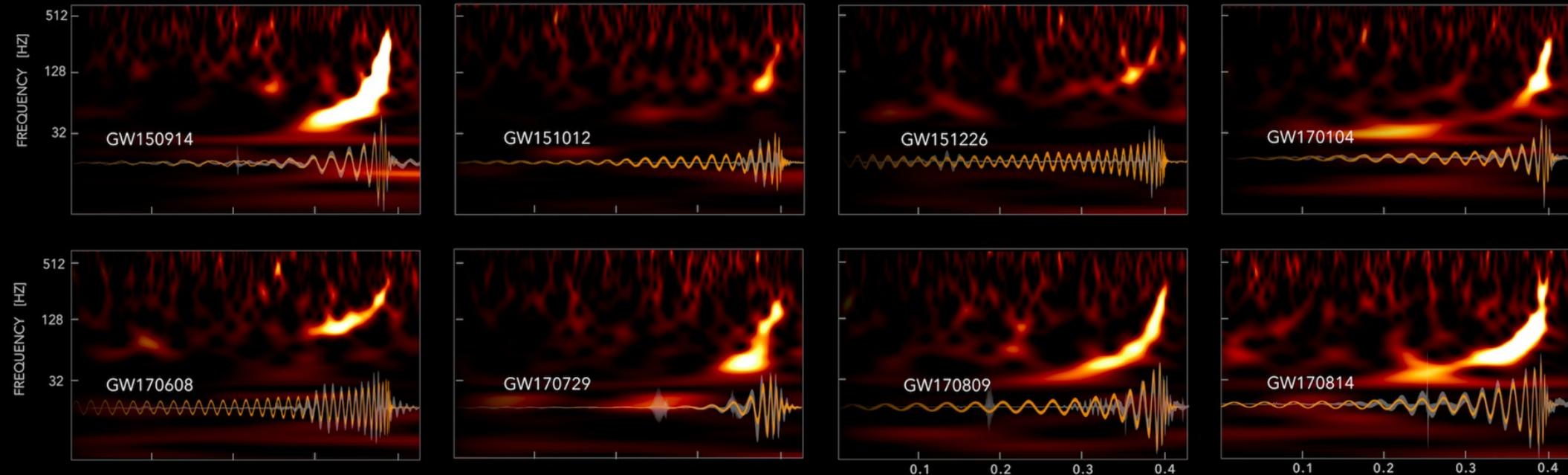
Image : Virgo



# Source 1 : les systèmes binaires (2)

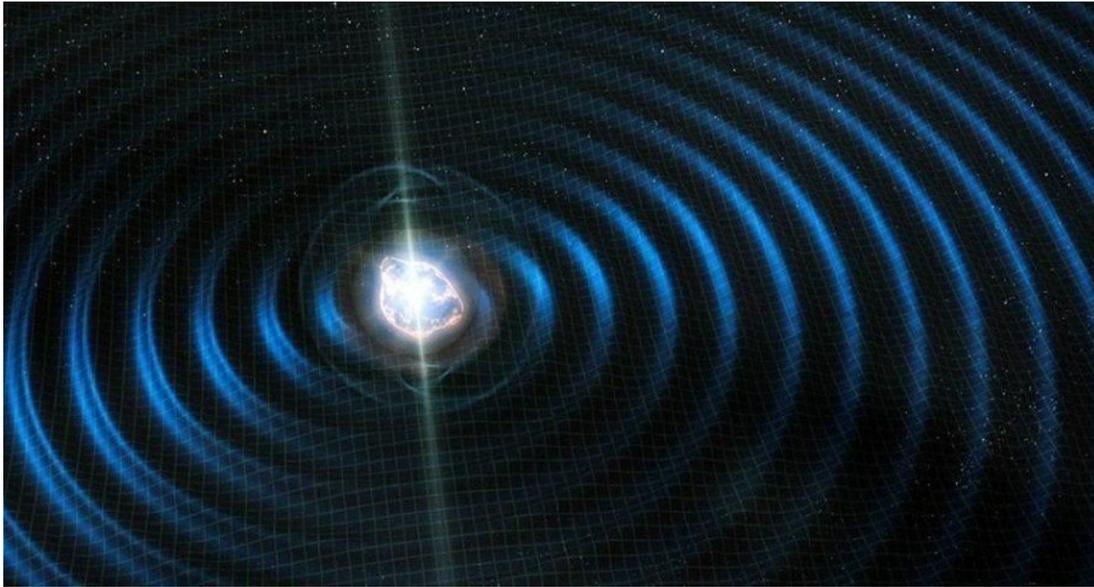
- Etat final : **coalescence binaire** (=effondrement du système)
  - Détection directe (2015) : Prix Nobel 2017 (LIGO)

## GRAVITATIONAL-WAVE TRANSIENT CATALOG-1

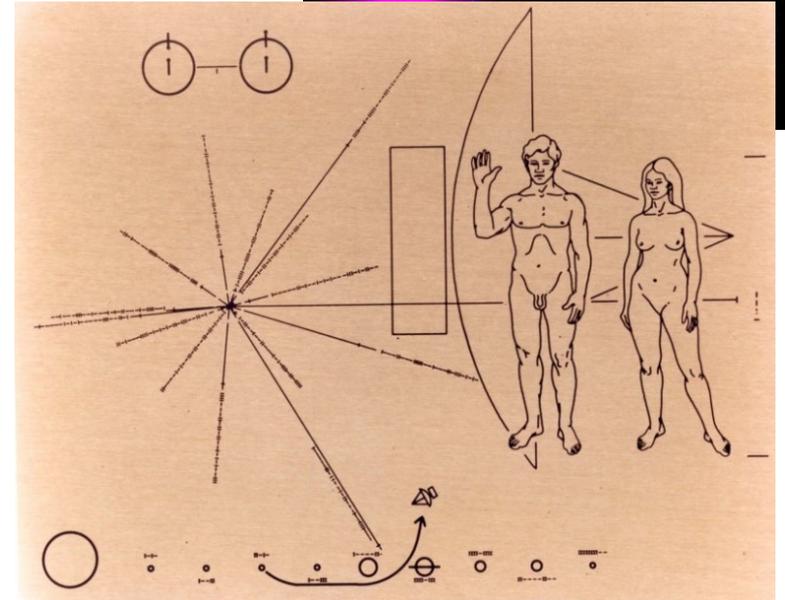
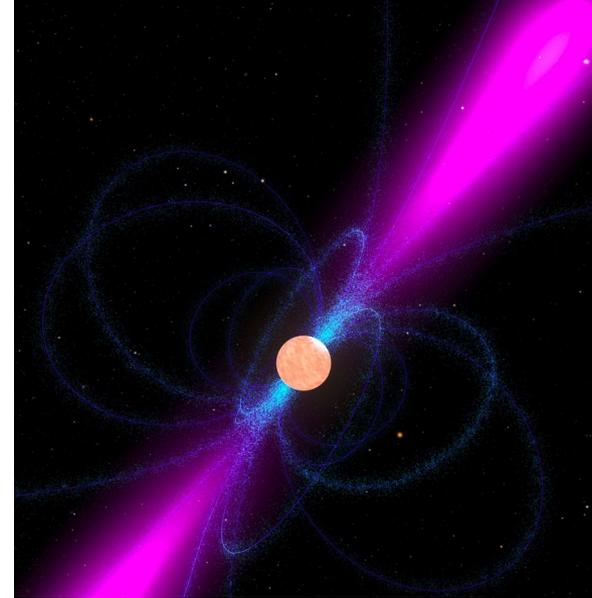


# Source 2 : les pulsars

**Étoile à neutrons** tournant très rapidement sur elle-même (jusqu'à 700 Hz) et émettant un fort rayonnement électromagnétique dans la direction de son axe magnétique

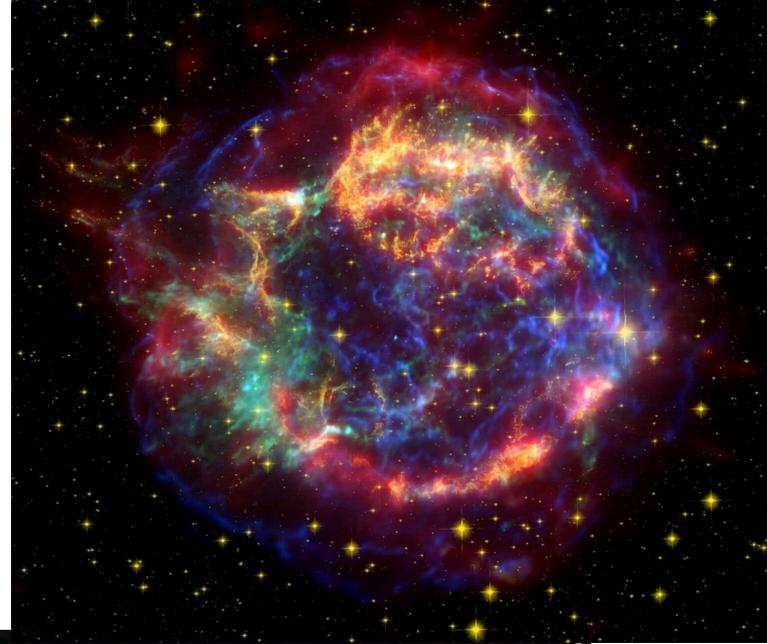


Émission d'ondes périodiques

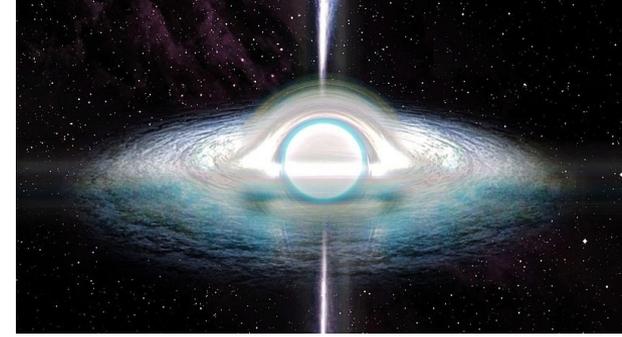


# Sources 3 : les supernovæ

- **Supernova** = explosion d'étoile
- Explosion **dissymétrique**
  - Signal très bref et difficile à prédire
  
- SN1987A mais tous les détecteurs d'ondes gravitationnelles de l'époque étaient en maintenance...



# Les trous blancs ou « fontaines blanches »

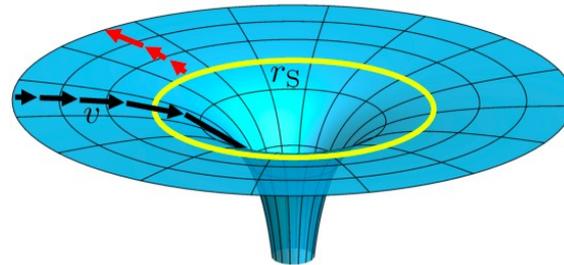


- Objet **symétrique du trou noir**
  - Les équations d'Einstein permettent de le décrire (par renversement de la variable temps)
- Objet **très hypothétique**
  - Doit être créé ou exister depuis la création de l'univers
    - aucun processus astrophysique connu ne mène à une telle configuration,
    - leur présence dès la création de l'Univers suppose des conditions initiales très spécifiques

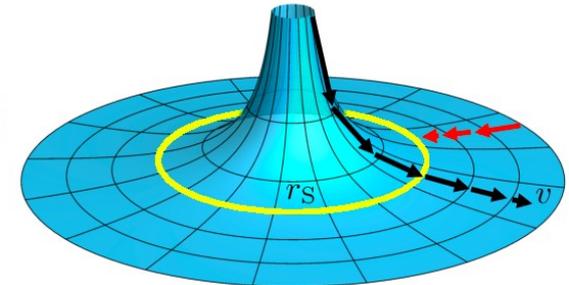
- On ne peut pas **rester à l'intérieur de l'horizon**

- Problème : il est **impossible d'y entrer...**
- En cosmologie, le Big Bang est parfois considéré comme un trou blanc

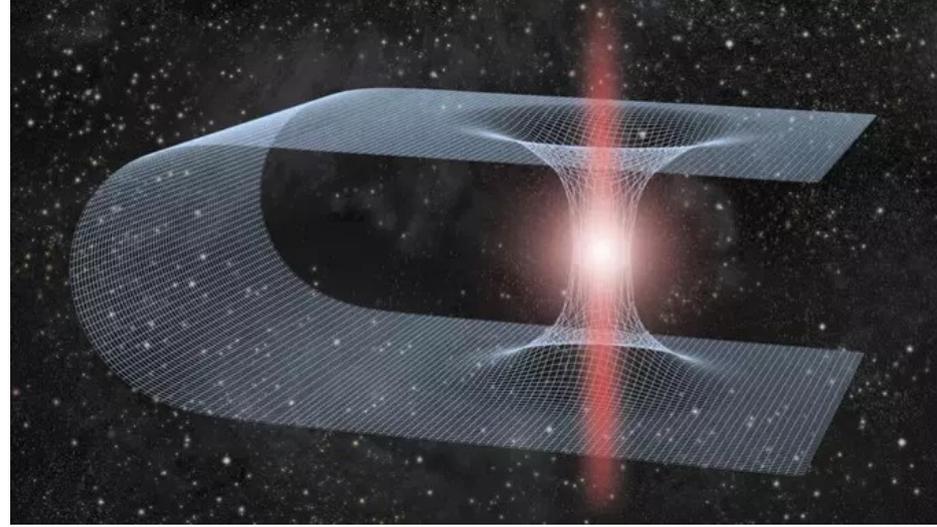
**Black hole**



**White hole**



# Les trous de ver ou « ponts d'Einstein-Rosen »



- Objet hypothétique reliant deux régions de l'espace-temps (un trou noir d'un côté et une fontaine blanche de l'autre)
  - « raccourci » à travers l'espace-temps
- Possibilité d'émission d'**ondes gravitationnelles** spécifiques
  - « *The Sound of Clearing the Throat: Gravitational Waves from a Black Hole Orbiting in a Wormhole Geometry* » :
    - Nous modélisons le passage d'un trou noir de masse stellaire dans un trou de ver [...] et trouvons une forme d'onde caractéristique [...] lorsque le trou noir émerge [...] dans notre région de l'Univers.  
(<https://arxiv.org/abs/2007.09135>)